# Übungsklausuren

# Grundlagen der Wirtschaftsmathematik

# und Statistik

## Übungsklausur Nr.1

**fernuni-online.de**



Soenke Semmelhaack

Schulstraße 2

25377 Kollmar

www.fernuni-online.de

soenke@fernuni-online.de

# Teil I Mathematik

**Aufgabe 1.1**

Berechne die erste Ableitung der folgenden Funktion:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x}$$

**Aufgabe 1.2**

Gegeben sei folgende Kostenfunktion:

$$K(x) = x^3 - 5x^2 + 8x + 10$$

Berechne die kostenminimale Gütermenge.

**Aufgabe 1.3**

Berechne das folgende Integral:

$$\int_0^2 3(x+1)^2 dx$$

**Aufgabe 1.4**

Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = e^x$$

und

$$g(x) = x$$

Es soll die Fläche berechnet werden, die von den beiden Funktionen im Intervall 0 bis 2 eingeschlossen wird. Gib die Fläche als Differenz der Stammfunktionen an (Rechne keinen Zahlenwert aus).

**Aufgabe 1.5**

Berechne

$$x = \cos\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$$

**Aufgabe 1.6**

Gegeben seien folgende Vektoren:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, x^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sind die Vektoren linear abhängig?

**Aufgabe 1.7**

Berechne den Abstand des Punktes $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ von der Geraden $(4 \quad 3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 2 = 0$.

Liegt der Punkt in Richtung des Orthogonalenvektors?

**Aufgabe 1.8**

Gegeben sei der Produktionsvektor

$$\boldsymbol{q} = (50{,}80{,}120)^T$$

und die Matrix der Produktionskoeffizienten

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Es sollen die tatsächlichen Verkaufsmengen berechnet werden.

# Teil II Statistik

**Aufgabe 1.1**

Welche der folgenden Merkmale sind diskret?

a) Lebensalter.
b) Anzahl an weiblichen Studenten an der Fernuni.
c) Anteil an weiblichen Studenten an der Fernuni.
d) Anzahl der Sonnenstunden im August 2011.
e) Keines der Merkmale.

**Aufgabe 1.2**

Gegeben seien folgende Daten über die Lebensdauer 10 Hunden derselben Rasse:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Alter | 1 | 5 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 12 | 13 | 15 |

Berechne Mittelwert (arithmetisches Mittel), Varianz, und Modus der Verteilung.

**Aufgabe 1.3**

Gegeben seien folgende Daten zu zwei Merkmalen x und y:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| X | 10 | 12 | 15 | 10 | 13 |
| Y | 30 | 35 | 17 | 28 | 40 |

Berechne den Pearsonschen Korrelationskoeffizienten.

**Aufgabe 1.4**

Gegeben sei die Regressionsfunktion $\hat{y} = a + bx$ mit folgenden Werten:

$$n = 4$$

$$\bar{y} = 10$$

$$\bar{x} = 12$$

$$\sum x_i y_i = 1.200$$

$$\sum x_i^2 = 800$$

a) Berechne a und b.
b) Berechne $\widehat{y_5}$ (für $x = 5$).

**Aufgabe 1.5**

Ein Student schreibt zwei Klausuren an der Fernuni. Mathe und Internes Rechnungswesen. Mathe besteht er zu 60% und Internes Rechnungswesen unabhängig davon zu 80%.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit beide Klausuren zu bestehen.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit nur eine der beiden Klausuren zu bestehen.
c) Berechne die Wahrscheinlichkeit mindestens eine der beiden Klausuren zu bestehen.
d) Berechne die Wahrscheinlichkeit Mathe zu bestehen, aber Internes Rechnungswesen nicht.

**Aufgabe 1.6 (nicht mehr klausurrelevant)**

Eine Zufallsvariable hat Erwartungswert 5 und Standardabweichung 2. Die genaue Verteilung ist nicht bekannt. Schätze mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyscheff mit welcher Wahrscheinlichkeit X mehr als 4 von seinem Mittelwert abweicht.

**Aufgabe 1.7**

Aus zwei Grundgesamtheiten wird eine Stichprobe von jeweils 10 gezogen. Die Varianz der ersten Grundgesamtheit ist 16, die der zweiten ist 25. Teste mit $\alpha = 5\%$ ob die beiden Mittelwerte verschieden sind. Gegeben sei:

$$D = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 = 5$$

# Lösungen Teil I

**Lösung 1.1**

Nutzung der Kettenregel:

$$f'(x) = 0{,}5(x^2 + x)^{-0{,}5} * (2x + 1)$$

**Lösung 1.2**

Gesucht ist die Nullstelle der ersten Ableitung.

$$K'(x) = 3x^2 - 10x + 8 = 0$$

Die Lösung kann man mit der p-q-Formel berechnen. In den allermeisten Fällen kann man sie aber auch raten/ablesen.

In diesem Fall ergibt sich:

$$x = 2$$

**Lösung 1.3**

$$[(x + 1)^3]_0^2 = 27 - 1 = 26$$

**Lösung 1.4**

Die beiden Funktionen haben keinen Schnittpunkt.

Die Fläche ist damit:

$$[F(x) - G(x)]_0^2$$

**Lösung 1.5**

$$x = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| * \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{3}{\sqrt{6} * \sqrt{5}} = 0{,}55$$

**Lösung 1.6**

Es ist das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$a + 2b + 2c = 0$$

$$2a + 4b + 3c = 0$$

$$b + c = 0$$

Aus der dritten Gleichung folgt

$$b = -c$$

Eingesetzt in die erste Gleichung:

$$a - 2c + 2c = 0$$

$$a = 0$$

a=0 und b=-c setzt man in die zweite Gleichung ein:

$$-4c + 3c = 0$$

Daher sind die 3 Vektoren linear unabhängig.

**Lösung 1.7**

Erstellen der Hesseschen Normalform:

$$\|a\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\frac{4}{5} * x_1 + \frac{3}{5} * x_2 - \frac{2}{5} = 0$$

Einsetzen des Punktes:

$$\frac{4}{5} * 2 + \frac{3}{5} * 2 - \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$$

Der Abstand ist positiv->Der Punkt liegt in Richtung des Orthogonalenvektors.

**Lösung 1.8**

Zunächst wird die Matrix $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}$ gebildet:

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}2 & 1 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Multipliziert mit **q** ergibt sich:

$$\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})*\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix} 42 \\ 10 \\ 72 \end{pmatrix}$$

# Lösungen Teil II

**Lösung 1.1**

Anzahlen sind diskret. Antwort: b, d.

**Lösung 1.2**

Der Mittelwert ist $\frac{1+5+8+9+10+11+12+12+13+15}{10} = 9{,}6$.

Die Varianz beträgt 15,24.

Modus ist die 12, da dieser Wert am häufigsten angenommen wird.

**Lösung 1.3**

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\tilde{s}_x * \tilde{s}_y}$$

Folgende Tabelle spiegelt die einzelnen Rechenschritte wider:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 10 | 12 | 15 | 10 | 13 | 60 |
| Y | 30 | 35 | 17 | 28 | 40 | 150 |
| $\bar{x}$ | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | |
| $\bar{y}$ | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 | |
| $\bar{x} - x$ | -2 | 0 | 3 | -2 | 1 | |
| $(\bar{x} - x)^2$ | 4 | 0 | 9 | 4 | 1 | 18 |
| $(\bar{y} - y)$ | 0 | 5 | -13 | -2 | 10 | |
| $(\bar{y} - y)^2$ | 0 | 25 | 169 | 4 | 100 | 298 |
| $(\bar{x} - x) * (\bar{y} - y)$ | 0 | 0 | -39 | 4 | 10 | -25 |

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\tilde{s}_x * \tilde{s}_y} = \frac{-5}{\sqrt{3{,}6} * \sqrt{59{,}6}} = \frac{-5}{1{,}9 * 7{,}72} = -0{,}34$$

**Lösung 1.4**

a) Die Berechnung erfolgt nach folgenden Formeln:

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$
$$b = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

$$b = \frac{1.200 - 480}{800 - 576} = 3{,}21$$

$$a = 10 - 3{,}21 * 12 = -28{,}52$$

b)

$$\widehat{y_5} = -28{,}52 + 3{,}21 * 5 = -12{,}47$$

**Lösung 1.5**

a) $0{,}6 * 0{,}8 = 48\%$
b) $0{,}6 * 0{,}2 + 0{,}4 * 0{,}8 = 44\%$
c) $44\% + 48\% = 92\%$ oder $1 - 0{,}4 * 0{,}2 = 92\%$
d) $0{,}6 * 0{,}2 = 12\%$

**Lösung 1.6 (nicht mehr klausurrelevant)**

Die Ungleichung von Tschebyscheff lautet:

$$P(\mu - c\sigma \leq X \leq \mu + c\sigma) \geq 1 - \frac{1}{c^2}$$

$c\sigma$ ist die Abweichung vom Mittelwert. Diese darf maximal 4 sein. Es gilt also:

$c * 2 = 4$

Daraus folgt $c = 2$.

Für die Wahrscheinlichkeit, dass X **weniger** als 4 von seinem Mittelwert abweicht folgt dann

$$P(|X - \mu| \leq 1) \geq 1 - \frac{1}{4}$$

Dass X mehr als 4 von seinem Mittelwert abweicht, ist entsprechend

$$1 - \ P(|X - \mu| \leq 1) = \ P(|X - \mu| > 1) < 0{,}25$$

(Diese Aufgabe weicht von der im Video besprochenen Aufgabe ab).

**Lösung 1.7**

Als Hypothesen stellt man auf:

$H_0: \mu_1 = \mu_2 \qquad , \qquad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

Der Annahmebereich berechnet sich zu:

$$-z_{1-\frac{a}{2}} * \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq D \leq z_{1-\frac{a}{2}} * \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$-1{,}96 * \sqrt{\frac{16}{10} + \frac{25}{10}} \leq D \leq 1{,}96 * \sqrt{\frac{16}{10} + \frac{25}{10}}$$

$$-3{,}97 \leq D \leq 3{,}97$$

Da D außerhalb des Annahmebereiches liegt, wird die Nullhypothese verworfen.

# Grundlagen der Wirtschaftsmathematik

# und Statistik

## Übungsklausur Nr.2

**fernuni-online.de**



Soenke Semmelhaack

Schulstraße 2

25377 Kollmar

www.fernuni-online.de

soenke@fernuni-online.de

# Teil I Mathematik

**Aufgabe 2.1**

Bestimme die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$
b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

**Aufgabe 2.2**

Welche der folgenden Stammfunktionen haben als Ableitung folgende Funktion:

$$f(x) = 2$$

a) $F(x) = 2 + x$
b) $F(x) = 3 + 2x$
c) $F(x) = x^2$
d) $F(x) = x^2 + 2$
e) $F(x) = \ln 2x$
f) $F(x) = 2x$

**Aufgabe 2.3**

Berechne die erste Ableitung der folgenden Funktion:

$$f(x) = x * \sin x^2$$

**Aufgabe 2.4**

Gegeben sei die folgende Gewinnfunktion in Abhängigkeit des Preises:

$$G(p) = -\frac{1}{3}p^3 + 16p + 10$$

Berechne den gewinnmaximalen Preis.

**Aufgabe 2.5**

Gegeben seien drei Vektoren:

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sind die Vektoren linear abhängig?

**Aufgabe 2.6**

Bestimme den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 2.7**

Löse das folgende Gleichungssystem:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

# Teil II Statistik

**Aufgabe 2.1**

Welche Aussagen sind richtig?

a) Farben sind nominal skalierbar.
b) Geldbeträge sind kardinal messbar.
c) Geldbeträge sind ordinal messbar.
d) Automarken sind metrisch messbar.
e) Keine der Aussagen ist richtig.

**Aufgabe 2.2**

Gegeben sind folgende Ausprägungen eines Merkmals:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 3 | 4 | 5 | 8 |

a) Berechne den Modus.
b) Berechne die Varianz.
c) Berechne den Median.

**Aufgabe 2.3**

Gegeben ist folgende Häufigkeitstabelle:

| | X1 | X2 | X3 |
|---|---|---|---|
| Y1 | 2 | 4 | 4 |
| Y2 | 8 | 1 | 5 |

Bestimme die relative Häufigkeiten von:

a) $f(Y1|X2)$

b) $f(X3|Y2)$

c) $f(X3)$

**Aufgabe 2.4**

Für die 2 unabhängigen Zufallsvariablen X und Y gilt:

$$E(X) = 2 \qquad Var(X) = 2$$

$$E(Y) = 2 \qquad Var(Y) = 3$$

Berechne Erwartungswerte und Varianzen der folgenden Zufallsvariablen:

a) $A: 2 + 2X$

b) $B: 2X + Y + 2$

**Aufgabe 2.5**

Eine Zufallsvariable X sei normalverteilt mit Erwartungswert 10 und Varianz 16. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallsvariable einen Wert von 8 oder kleiner annimmt.

**Aufgabe 2.6**

Es sei eine einfache Zufallsstichprobe vom Umfang n=7 aus einer Normalverteilung gegeben:

0,5 0,7 1 1,5 0,6 1,2 1,1

Berechne den Schätzwert einer erwartungstreuen Schätzfunktion für den Parameter µ.

a) Berechne den ML-Schätzer für µ.
b) Berechne $\sigma^2$ mit der Schätzfunktion $s^2 * \frac{n}{n-1}$.

**Aufgabe 2.7**

Ein Unternehmen stellt Nägel her. Die Länge der Nägel sei normalverteilt mit unbekanntem Mittelwert. Die Standardabweichung ist 1mm. Der Mittelwert soll anhand einer Stichprobe vom Umfang n geschätzt werden. Wie groß muss n mindestens sein, damit das Stichprobenmittel mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,45% um höchstens 0,5mm von µ abweicht?

# Lösungen Teil I

**Lösung 2.1**

a) Die Funktion strebt gegen unendlich.
b) Man bildet die beiden Ableitungen:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x}{1} = 2$$

**Lösung 2.2**

Die Stammfunktion von

$$f(x) = 2$$

Ist

$$F(x) = 2x + c$$

b) und f) sind also richtig.

**Lösung 2.3**

Hier muss die Produktregel und die Kettenregel genutzt werden.

$$f'(x) = 1 * \sin x^2 + x * \cos x^2 * 2x$$

**Lösung 2.4**

Gesucht ist das Maximum der Gewinnfunktion.

$$G'(p) = -p^2 + 16 = 0$$

$$p = 4$$

**Lösung 2.5**

Zu lösen ist das folgende Gleichungssystem:

$$4a + 4b + 3c = 0$$

$$2a - b + c = 0$$

$$-4a + 2b = 0$$

Aus der dritten Gleichung folgt:

$$b = 2a$$

Eingesetzt in die zweite Gleichung:

$$2a - 2a + c = 0$$

$$c = 0$$

Eingesetzt in die erste Gleichung:

$$4a + 8a = 0$$

Die Vektoren sind linear unabhängig.

**Lösung 2.6**

1) Das Element $a_{11}$ist ungleich Null, daher

2) teilen wir durch 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 4 & 9 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3) Um unter dem Element $a_{11}$ Nullen zu erzeugen, wird das 4-fache ($a_{21} = 4$) der ersten Zeile von der zweiten abgezogen und das 1-fache ($a_{31} = 1$) der ersten Zeile von der dritten Zeile abgezogen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Wir beginnen wieder mit 1), versuchen aber nun an der Stelle $a_{22}$ eine Eins zu erzeugen.

4.1) $a_{22}$ ist ungleich Null und daher

4.2) teilen wird Zeile 2 durch 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

4.3) Um unter $a_{22}$ eine Null zu erzeugen, wird das (-1,5)-fache der zweiten Zeile von der dritten subtrahiert.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5) Da keine Zeilenvektoren komplett aus Nullen bestehen, hat die Matrix vollen Rang!

**Lösung 2.7**

Zunächst wird die Matrix **A** um **b** erweitert:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right)$$

Das Element $a_{11}$ist schon $=1$ und wir erzeigen direkt die Nullen unter diesem Element. Die Rechenschritte sind:

- Gleichung II minus $2*$ Gleichung I

- Gleichung III minus Gleichung I

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Um an der Stelle $a_{22}$ eine 1 zu erzeugen, wird Gleichung II durch $-3$ geteilt. Um darunter Nullen zu erzeugen, wird das 7-fache der neuen Gleichung II zu der Gleichung III hinzuaddiert.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Nun muss noch an der Stelle $a_{33}$ eine 1 erzeugt werden: Gleichung III mit $-3$ multiplizieren.

Aus der Ergebnismatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

können die Lösungen abgelesen werden:

In der letzten Zeile steht:

$$0x_1 + 0x_2 + x_3 = 2$$

Woraus $x_3 = 2$ folgt.

In der zweiten Zeile steht:

$$0x_1 + 1x_2 + \frac{2}{3}x_3 = -2/3$$

Hier wird $x_3 = 2$ eingesetzt, um $x_2 = -2$ zu erhalten

Genauso werden $x_2$ und $x_3$ in Gleichung I eingesetzt, um $x_1 = 3$ zu erhalten.

# Lösungen Teil II

**Lösung 2.1**

a) Richtig (qualitatives Merkmal).
b) Richtig.
c) Richtig.
d) Falsch (qualitatives Merkmal)
e) Falsch.

**Lösung 2.2**

a) Alle Ausprägungen sind gleich oft gemessen. Daher gibt es keinen Modus.
b) Die Varianz beträgt 5,36.
c) Der Median ist die 4.

**Lösung 2.3**

Man benötigt die Randverteilung.

| | X1 | X2 | X3 | Summe |
|---|---|---|---|---|
| Y1 | 2 | 4 | 4 | 10 |
| Y2 | 8 | 1 | 5 | 14 |
| Summe | 10 | 5 | 9 | 24 |

a) $f(Y1|X2) = 4/5$

b) $f(X3|Y2) = 5/14$

c) $f(X3) = 9/24$

**Lösung 2.4**

Erwartungswerte zu berechnen ist einfach. Für die Varianzen musst du dir merken:

$$VAR(aX) = a^2 VAR(X)$$

Und für **unabhängige** Zufallsvariablen X und Y gilt

$$VAR(X+Y) = VAR(X) + VAR(Y)$$

a) $E(A) = 2 + 2 * 2 = 6$

$Var(A) = 2^2 * 2 = 8$

b) $E(B) = 2 * 2 + 2 + 2 = 8$

$Var(B) = 2^2 * 2 + 3 = 11$

**Lösung 2.5**

Standardisieren:

$$Z = \frac{8 - 10}{4} = -0{,}5$$

Der entsprechende Wert der Standardnormalverteilung beträgt:

$$\Phi_{0;1}(-0{,}5) = 1 - 0{,}69146 = 0{,}30854$$

**Lösung 2.6**

a) Dies ist einfach der Mittelwert von 0,94.
b) Dies ist äquivalent zu 1).
c) Man erhält $s^2 = 0{,}11$ und damit $\sigma^2 = 0{,}13$.

**Lösung 2.7**

Die Grundgesamtheit wird als unendlich groß angenommen. Es gilt: $\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Der z-Wert für 95,45% ist 2. Es gilt also:

$$2 * \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0{,}5$$

$$n = 16$$

# Grundlagen der Wirtschaftsmathematik und Statistik

## Übungsklausur Nr.3

**fernuni-online.de**



Soenke Semmelhaack

Schulstraße 2

25377 Kollmar

www.fernuni-online.de

soenke@fernuni-online.de

# Teil I Mathematik

**Aufgabe 3.1**

Berechne die erste Ableitung der folgenden Funktion:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{e^x}$$

**Aufgabe 3.2**

Bestimme die folgenden Grenzwerte:

a)

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

b)

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

**Aufgabe 3.3**

Berechne die Stammfunktion zu folgender Funktion:

$$f(x) = x^4 + 2x^2 + 5$$

**Aufgabe 3.4**

Berechne die Fläche, die zwischen den Funktionen

$$f(x) = x^3$$

und

$$g(x) = x^2$$

Im Intervall 2 bis 4 eingeschlossen wird.

**Aufgabe 3.5**

Berechne x, sodass es Komponente eines normierten Vektors ist:

$$\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} = LK \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 3.6**

Gegeben seien folgende Vektoren:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, x^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sind die Vektoren linear abhängig?

**Aufgabe 3.7**

Berechne den Abstand des Punktes $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ von der Gerade $(4 \quad 3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 10 = 0$.

Liegt der Punkt in Richtung des Orthogonalenvektors?

**Aufgabe 3.8**

Gegeben sei das folgende Simplex Tableau:

| $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −1 | −2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | −1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 6 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 5 |

a) Welche Variablen sind in der Basis?
b) Welche Variable sollte als nächstes in die Basis aufgenommen werden.

# Teil II Statistik

**Aufgabe 3.1**

Welche der folgenden Merkmale sind stetig und welche diskret?

a) Wassertemperatur.
b) Bruttosozialprodukt.
c) Anzahl von Firmenpleiten in einem Jahr.
d) Arbeitslosenquote.
e) Anzahl an Arbeitslosen.

**Aufgabe 3.2**

Gegeben sind folgende Ausprägungen eines Merkmals:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 3 | 4 | 5 | 8 |

a) Berechne das arithmetische Mittel.
b) Berechne die mittlere absolute Abweichung.
c) Gib die Spannweite an.

**Aufgabe 3.3**

Gegeben seien folgende Daten zu zwei Merkmalen x und y:

| Jahre | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| X | 15 | 20 | 22 | 18 | 17 |
| Y | 25 | 22 | 27 | 20 | 30 |

Berechne den Pearsonschen Korrelationskoeffizienten.

**Aufgabe 3.4**

Ein fairer 6-seitiger Würfel wird zweimal hintereinander geworfen. X bezeichne das Ergebnis des ersten, Y des zweiten Wurfes.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit von X=2.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit von Y>4.
c) Berechne die Wahrscheinlichkeit von „X=2 und Y>4“.
d) Berechne die Wahrscheinlichkeit von X=2 oder Y>4.

**Aufgabe 3.5**

Eine Zufallsvariable X sei normalverteilt mit Erwartungswert 5 und Varianz 25. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallsvariable einen Wert von 8 oder kleiner annimmt.

**Aufgabe 3.6**

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Das Konfidenzintervall zum Niveau 90% überdeckt zu 90% den wahren Parameter $\mu$.

b) Eine Verdopplung des Stichprobenumfangs halbiert das Konfidenzintervall.

c) Eine Vergrößerung des Konfidenzniveaus führt zu einer Verkleinerung des Konfidenzintervalls.

d) Der aus der Stichprobe berechnete Mittelwert $\bar{x}$ liegt bei einem 95% Konfidenzintervall zu 95% innerhalb des Intervalls.

e) keine der Aussagen ist richtig.

# Lösungen Teil I

**Lösung 3.1**

Diese Aufgabe kann durch Nutzung der Quotientenregel und Kettenregel für den Zähler gelöst werden. Ich empfehle aber die Funktion etwas umzustellen und die etwas einfachere Produktregel und die Kettenregel zu nutzen:

$$f(x) = \sqrt{x-1} * e^{-x}$$

$$f'(x) = 0{,}5 * (x-1)^{-0{,}5} * 1 * e^{-x} - e^{-x} * \sqrt{x-1}$$

**Lösung 3.2**

a) Regel von L'Hospital:

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2}{1} = 12$$

b) Strebt gegen Null

**Lösung 3.3**

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + 5x + c$$

**Lösung 3.4**

Die Fläche ist die Differenz der Stammfunktionen im Intervall 2 bis 4.

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + c$$

$$G(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4 + c - (\frac{1}{3}x^3 + c)\right]_2^4 = 64 - 21{,}33 - (2 - 2{,}67) = 41{,}33$$

**Lösung 3.5**

Länge des Vektors:

$$\sqrt{1+16} = 4{,}12$$

$$x = \frac{4}{4{,}12}$$

**Lösung 3.6**

Es ist das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$2a + 4b + 2c = 0$$

$$2a + 4b + 3c = 0$$

$$b + c = 0$$

Aus der dritten Gleichung folgt

$$b = -c$$

Eingesetzt in die erste Gleichung:

$$2a - 4c + 2c = 0$$

$$a = c$$

Eingesetzt in die zweite Gleichung:

$$2c - 4c + 3c = 0$$

Dies ist falsch. Die drei Vektoren sind linear unabhängig.

**Lösung 3.7**

Erstellen der Hesseschen Normalform:

$$\|a\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\frac{4}{5} * x_1 + \frac{3}{5} * x_2 - \frac{10}{5} = 0$$

Einsetzen des Punktes:

$$\frac{4}{5} * 1 + \frac{3}{5} * 2 - \frac{10}{5} = 0$$

Der Abstand ist Null->Der Punkt liegt auf der Gerade.

**Lösung 3.8**

a) Jede Variable die zum Einheitsvektor gehört ist in der Basis: $x_0, x_3, x_4, x_5$.
b) Im nächsten Schritt wird die Variable aufgenommen, die den größten negativen Wert in der Zielfunktionszeile hat: $x_2$.

# Lösungen Teil II

**Lösung 3.1**

Das steige Merkmal kann mehr als abzählbar unendlich viele Ausprägungen annehmen.

a) Stetig.
b) Stetig.
c) Nicht stetig.
d) Stetig.
e) Nicht stetig.

**Lösung 3.2**

a) Es beträgt 4,2
b) Sie beträgt 1,84
c) Sie beträgt 7.

**Lösung 3.3**

Hier muss wieder nach Formel eingesetzt werden.

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\tilde{s}_x * \tilde{s}_y} = -0{,}06$$

**Lösung 3.4**

a) 1/6
b) 1/3
c) $1/6 * 1/3 = 1/18$
d) $1 - (5/6 * 4/6)$

**Lösung 3.5**

Standardisieren:

$$Z = \frac{8-5}{5} = 0{,}6$$

Der entsprechende Wert der Standardnormalverteilung beträgt:

$$\Phi_{0;1}(0{,}6) = 0{,}72575$$

**Lösung 3.6**

a) Richtig.

b) Falsch. Siehe Formel für das Konfidenzintervall.

c) Falsch. Das Intervall wird größer.

d) Falsch. Das Intervall liegt um $\bar{x}$ herum. Daher liegt $\bar{x}$ immer im Intervall.

# Grundlagen der Wirtschaftsmathematik

# und Statistik

## Übungsklausur Nr.4

**fernuni-online.de**



Soenke Semmelhaack

Schulstraße 2

25377 Kollmar

www.fernuni-online.de

soenke@fernuni-online.de

# Teil I Mathematik

**Aufgabe 4.1**

Berechne die erste Ableitung der folgenden Funktion:

$$f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

**Aufgabe 4.2**

Berechne den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x * \cos x}{e^x - 1}$$

**Aufgabe 4.3**

Berechne das folgende Integral:

$$\int_1^4 (x^3 + 2x^2 + x - 3)dx$$

**Aufgabe 4.4**

Berechne den Abstand des Punktes $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ von der Gerade $(4 \quad 3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 5 = 0$.

Liegt der Punkt in Richtung des Orthogonalenvektors?

**Aufgabe 4.5**

Berechne:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 4.6**

Bestimme den mengentheoretischen Durchschnitt des folgenden LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 14 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

**Aufgabe 4.7**

Berechne das Inverse zu folgender Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 4.8**

Für die Produktion zweier Güter A und B auf drei Maschinen M1, M2, M3 sind folgende Daten gegeben:

| Bearbeitungszeit | M1 | M2 | M3 |
|---|---|---|---|
| A | 1 | 2 | 5 |
| B | 3 | 2 | 1 |
| Max. verfügbare Zeit | 50 | 60 | 40 |

Pro Stück werden folgende Gewinne erzielt:

A: 10 Euro pro Stück

B: 12 Euro pro Stück

Formuliere das LOP für die gewinnmaximale Produktion.

# Teil II Statistik

**Aufgabe 4.1**

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Ein qualitatives Merkmal kann man gut mit einem Kreisdiagramm darstellen.
b) Ein qualitatives Merkmal kann man gut mit einem Balkendiagramm darstellen.
c) Ein qualitatives Merkmal kann man gut mit einem Polygonzug darstellen.
d) Zur Darstellung eines qualitativen Merkmals benötigt man eine Koordinatendarstellung.
e) Keine der Aussagen sind richtig.

**Aufgabe 4.2**

Gegeben sei folgende Häufigkeitsverteilung:

| Y\X | 2 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 8 |
| 2 | 1 | 2 | 7 |
| 4 | 5 | 3 | 1 |

Berechne die Kovarianz.

**Aufgabe 4.3**

Gegeben sei die Regressionsfunktion $\hat{y} = a + bx$ mit den folgenden Varianzen:

$$\tilde{s}_{\hat{y}}^2 = 5$$

$$\tilde{s}_y^2 = 45$$

a) Berechne das Bestimmtheitsmaß.

b) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

i) Das Merkmal x erklärt die Änderungen von y gut.

ii) x ist nur einer von vielen Einflussfaktoren auf y.

iii) Zwischen x und y herrscht ein linearer Zusammenhang.

**Aufgabe 4.4**

Gegeben sind zwei unabhängige Zufallsvariablen X und Y mit folgenden Parametern:

$$E(X) = 2$$

$$E(Y) = 4$$

$$VAR(X) = 4$$

$$VAR(Y) = 9$$

Weiter sei die Zufallsvariable Z=2X+Y-1 gegeben.

a) Berechne E(Z)
b) Berechne VAR(Z)
c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, mit der Z Werte annimmt, die nicht mehr als +- 50 von ihrem Erwartungswert abweichen.

**Aufgabe 4.5**

Gegeben sind 2 normalverteilte unabhängige Zufallsvariablen $X_1, X_2$ mit Erwartungswert $\mu_1 = 10$ und $\mu_2 = 6$ sowie Varianz $\sigma_1^2 = 1$ und $\sigma_2^2 = 0{,}5$.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Summe aus zwei zufällig ausgewählten Stichproben zwischen 15 und 17.

**Aufgabe 4.6**

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

a) Die Erhöhung der Lufttemperatur im Zuge des Klimawandels kann mit einem einseitigen Test untersucht werden.
b) Mit einem einseitigen Test kann überprüft werden, ob das Fußballteam A höhere Chancen auf den Meistertitel hat, als Fußballteam B.
c) Ein Signifikanzniveau von 5% bedeutet, dass die Nullhypothese mit maximal 5% abgelehnt wird.
d) Bei einem einseitigen Test wird geprüft ob ein Parameter einen bestimmten Wert annimmt.
e) Keine der Aussagen ist richtig.

# Lösungen Teil I

**Lösung 4.1**

Kettenregel:

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)} * 2x$$

**Lösung 4.2**

Regel von L'Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{-x * \sin x + \cos x}{e^x} = 1$$

**Lösung 4.3**

Die Stammfunktion lautet:

$$\frac{1}{4} * x^4 + \frac{2}{3} * x^3 + \frac{1}{2} * x^2 - 3x + c$$

Damit ergibt sich für das bestimmte Integral:

$$\left[\frac{1}{4} * x^4 + \frac{2}{3} * x^3 + \frac{1}{2} * x^2 - 3x\right]_1^4 = 102{,}67 + 1{,}58 = 104{,}25$$

**Lösung 4.4**

Erstellen der Hesseschen Normalform:

$$\|a\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\frac{4}{5} * x_1 + \frac{3}{5} * x_2 - \frac{5}{5} = 0$$

Einsetzen des Punktes:

$$\frac{4}{5} * 1 + \frac{3}{5} * 1 - \frac{5}{5} = \frac{2}{5}$$

Der Abstand ist positiv->Der Punkt liegt in Richtung des Orthogonalenvektors.

**Lösung 4.5**

$$\begin{pmatrix} 11 & 26 \\ 7 & 17 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Die 11 ergibt sich z.B. aus: $1 * 1 + 2 * 1 + 4 * 2 = 11$.

**Lösung 4.6**

Man ermittelt zunächst den Rang der 3 x 3 Matrix und der erweiterten 4 x 3 Matrix.

Den Rang der 3x3 Matrix kann man über die Determinante ermitteln:

$$2 * 0 * 1 + 1 * 1 * 14 + 0 * 1 * 4 - (0 * 0 * 14 + 1 * 1 * 1 + 2 * 1 * 4)$$

$$= 14 - 9 = 5$$

Da die Determinante ungleich Null ist, hat die 3x3 Matrix vollen Rang. Der mengentheoretische Durchschnitt ist ein Punkt.

**Lösung 4.7**

Erzeugen von 1en in der Hauptdiagonale und Nullen ansonsten:

II-I

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

-1*II

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

III+II

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

I-2*II

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

-1*III

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

II+III

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

I+2*III

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

**Lösung 4.8**

Zielfunktion:

$$\max z = 10a + 12b$$

u.d.N.:

$$a + 3b \leq 50$$

$$2a + 2b \leq 60$$

$$5a + b \leq 40$$

Nichtnegativität:

$$a \geq 0\,;\; b \geq 0$$

# Lösungen Teil II

**Lösung 4.1**

Diagramme, die keine Koordinaten beinhalten sind gut zur Darstellung von qualitativen Merkmalen geeignet.

a) Richtig.
b) Richtig.
c) Falsch.
d) Falsch.
e) Falsch.

**Lösung 4.2**

Man benötigt die Randverteilung:

| Y\X | 2 | 4 | 5 | Summe |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 8 | 16 |
| 2 | 1 | 2 | 7 | 10 |
| 4 | 5 | 3 | 1 | 9 |
| Summe | 9 | 10 | 16 | 35 |

Die Kovarianz berechnet man nach der folgenden Formel:

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r}(x_i - \bar{x}) * (y_k - \bar{y}) * h(x_j, y_k)$$

$$\bar{x} = 3{,}94$$

$$\bar{y} = 2{,}06$$

$$Cov(X,Y) = -0{,}57$$

**Lösung 4.3**

a) $r^2 = \frac{\tilde{s}_{\hat{y}}^2}{\tilde{s}_y^2} = 5/45$

b)

i) Nein. Das Bestimmtheitsmaß nimmt einen relativ kleinen Wert an.

ii) Richtig. Der Großteil der Änderung in y wird nicht durch x erklärt.

iii) Richtig.

**Lösung 4.4 (Tschebyscheff ist nicht mehr klausurrelevant)**

a) $E(Z) = 2 * 2 + 4 - 1 = 7$
b) $VAR(Z) = 2^2 * 4 + 9 = 25$
c) Man nutzt die Ungleichung von Tschebyscheff:

$$P(\mu - c\sigma \leq X \leq \mu + c\sigma) \geq 1 - \frac{1}{c^2}$$

Aus $c\sigma = 50$ folgt $c = 10$. Die Wahrscheinlichkeit beträgt also $1 - \frac{1}{100} = 99\%$.

**Lösung 4.5**

Die Summe aus zwei normalverteilten unabhängiger Zufallsvariablen ist auch wieder normalverteilt. Die Parameter errechnen sich zu:

$$E(X_1 + X_2) = 10 + 6 = 16$$

$$Var(X_1 + X_2) = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$$

$$P(15 \leq X \leq 17) = P(\frac{15 - 16}{\sqrt{1{,}5}} \leq Z \leq \frac{17 - 16}{\sqrt{1{,}5}} = P(-0{,}82 \leq Z \leq 0{,}82)$$

$$\Phi_{0;1}(0{,}82) - \Phi_{0;1}(-0{,}82) = 0{,}79 - (1 - 0{,}79) = 0{,}58$$

**Lösung 4.6**

a) Richtig.
b) Richtig.
c) Falsch. Eine zutreffende Nullhypothese wird mit maximal 5% abgelehnt.
d) Falsch. Es wird immer > oder < geprüft.

# Grundlagen der Wirtschaftsmathematik und Statistik

## Übungsklausur Nr.5

**fernuni-online.de**



Soenke Semmelhaack

Schulstraße 2

25377 Kollmar

www.fernuni-online.de

soenke@fernuni-online.de

# Teil I Mathematik

**Aufgabe 5.1**

Gegeben sei folgende Preis-Absatz-Funktion:

$$p(x) = 5 - \frac{1}{2}x$$

Bestimme die Grenzumsatzfunktion und den maximalen Umsatz.

**Aufgabe 5.2**

Berechne den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

**Aufgabe 5.3**

Berechne das folgende Integral:

$$\int_0^1 x * \sin x \, dx$$

**Aufgabe 5.4**

Stelle den Vektor

$$x = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Als Linearkombination der folgenden Vektoren dar:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 5.5**

Gegeben sei der Verkaufsvektor $\boldsymbol{y} = (20{,}40{,}20)^T$ und die Gesamtbedarfsmatrix

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 7 & -2 & 5 \\ 11 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

Berechne den Bruttobedarfsvektor.

**Aufgabe 5.6**

Bestimme den Rang der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 5.7**

Berechne das Inverse zu folgender Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 5.8**

Gegeben sei das folgende Simplex Tableau:

| $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −1 | −2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | −1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 6 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 5 |

a) Bestimme den aktuellen Zielfunktionswert.

b) Bestimme den aktuellen Wert von $x_5$.

# Teil II Statistik

**Aufgabe 5.1**

Gegeben sei folgende Häufigkeitsverteilung:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 3 | 5 | 7 | 10 | 15 |
| h(x) | 10 | 10 | 20 | 10 | 25 | 25 |

a) Berechne $F(5)$
b) Berechne $f(x < 5)$
c) Berechne $f(3 < x < 10)$

**Aufgabe 5.2**

Ein Unternehmen kaufte im letzten Jahr dreimal Rohstoffe zu folgenden Preisen:

100 kg zu 100€/kg

150kg zu 60€/kg

100kg zu 50€/kg.

Berechne den Durchschnittspreis.

**Aufgabe 5.3**

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

a) Sind die Merkmalswerte geordnet, so nehmen Pearsonscher Korrelationskoeffizient und Spearmanscher Rangkorrelationskoeffizient dieselben Werte an.
b) Ist der Pearsonsche Korrelationskoeffizient gleich Null, so sind die Merkmale unabhängig.
c) Sind zwei Merkmale unabhängig, so ist der Pearsonsche Korrelationskoeffizient gleich Null.
d) Der Spearmansche Rangkorrelationskoeffizient kann genutzt werden um den Zusammenhang zwischen einem metrisch messbaren und einem qualitativen Merkmal zu messen.
e) Der Pearsonsche Korrelationskoeffizient kann genutzt werden um den Zusammenhang zwischen einem metrisch messbaren und einem qualitativen Merkmal zu messen.

**Aufgabe 5.4**

Zwei Zufallsvariablen X und Y besitzen folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

| Y\X | 1 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,1 | 0,2 | 0,1 |
| 1 | 0,1 | 0,3 | 0,2 |

a) Berechne E(X)
b) Berechne E(Y)
c) Berechne Cov(X,Y)
d) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

**Aufgabe 5.5**

Gegeben seien die folgenden Schätzfunktionen:

$$T1 = \frac{X_1 + X_n}{n}$$

$$T2 = \frac{X_1 + X_n}{2}$$

$$T3 = (X_1 + X_2 + 2X_n)/4$$

Die Stichprobenvariablen $X_1$ $bis$ $X_n$ sind unabhängig identisch verteilt.

a) Welche Schätzfunktion ist erwartungstreu?
b) Berechne die Varianz von T3.

**Aufgabe 5.6**

Es soll getestet werden, ob die Varianz einer Grundgesamtheit von 25 verschieden ist.

Es wird eine Stichprobe vom Umfang $n = 16$ genommen und der Test soll zum Niveau $a = 10\%$ durchgeführt werden. Die Stichprobenvarianz beträgt 35.

# Lösungen Teil I

**Lösung 5.1**

Umsatzfunktion:

$$U(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x$$

Grenzumsatzfunktion:

$$U'(x) = -x + 5$$

Diese Funktion hat ein Maximum bei $x = 5$. Dies ist der Maximalumsatz.

**Lösung 5.2**

Regel von L'Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x}$$

Erneute Anwendung der Regel von L'Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = 0{,}5$$

**Lösung 5.3**

Die Lösung erfolgt durch partielle Integration. Es gilt:

$$\int u * v' = u * v - \int u' * v$$

$$v' = \sin x$$

$$u = x$$

$$v = -\cos x$$

$$u' = 1$$

$$u * v - \int u' * v = -\mathrm{x} * \cos x - \int -\cos x \; dx = -\mathrm{x} * \cos x + \sin x$$

Für das bestimmte Integral gilt also:

$$[-\mathrm{x} * \cos x + \sin x\,]_0^1 = 0{,}3$$

**Lösung 5.4**

Das folgende Gleichungssystem muss gelöst werden:

$$+4b + 2c = 5$$

$$2a + 3d = 1$$

$$b + 2d = 4$$

$$a + c = 10$$

Aus Gleichung 3 folgt:

$$b = 4 - 2d$$

Eingesetzt in Gleichung 1:

$$16 - 8d + 2c = 5$$

$$c = 4d - 5{,}5$$

Eingesetzt in Gleichung 4:

$$a + 4d - 5{,}5 = 10$$

$$a = 15{,}5 - 4d$$

Eingesetzt in Gleichung 2:

$$31 - 8d + 3d = 1$$

$$d = 6$$

$$a = -8{,}5$$

$$c = 18{,}5$$

$$b = -8$$

**Lösung 5.5**

Zunächst berechnet man das Inverse zu der Matrix (Matrixinversion siehe Kapitel 2.2).

Das Inverse beträgt

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Multipliziert mit y ergibt sich:

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} -60 \\ 160 \\ 240 \end{pmatrix}$$

**Lösung 5.6**

Man berechnet die Determinante nach der Regel von Sarrus:

$$2 * 1 * 2 + 3 * 8 * 1 + 1 * 6 * 0 - (1 * 1 * 1 + 3 * 6 * 2 + 2 * 8 * 0) =$$

$$4 + 24 - 1 - 36 = -9$$

Da die Determinante ungleich Null ist, hat die Matrix vollen Rang.

**Lösung 5.7**

Erzeugen von 1en in der Hauptdiagonale und Nullen ansonsten:

0,5*II

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

I+II

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

III-II

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/2 & 3/2 & 1/20 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 1 \end{array}\right)$$

2*III

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

II-0,5*III

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

I+0,5*III

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

**Lösung 5.8**

a) Den Zielfunktionswert kann man auf der RHS (Spalte b) als 0 ablesen.
b) $x_5$ ist aktuell in der Basis und man kann den Wert auf der RHS ablesen. Antwort: 5.

# Lösungen Teil II

**Lösung 5.1**

a) $F(5) = f(5) + f(3) + f(1) = 40\%$
b) $f(x < 5) = f(3) + f(1) = 20\%$
c) $f(3 < x < 10) = f(5) + f(7) = 30\%$

**Lösung 5.2**

Das Unternehmen hat insgesamt 350kg für insgesamt 24.000€ gekauft. Der Durchschnittspreis beträgt

68,57€/kg.

**Lösung 5.3**

a) Richtig.
b) Falsch. Es können noch nichtlineare Abhängigkeiten bestehen.
c) Richtig.
d) Richtig.
e) Falsch.

**Lösung 5.4**

Man bildet zunächst die Randverteilung:

| Y\X | 1 | 2 | 5 | Summe |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,1 | 0,2 | 0,1 | 0,4 |
| 1 | 0,1 | 0,3 | 0,2 | 0,6 |
| Summe | 0,2 | 0,5 | 0,3 | 1 |

a) $E(X) = 1 * 0{,}2 + 2 * 0{,}5 + 5 * 0{,}3 = 2{,}7$
b) $E(Y) = 0{,}6$
c) $Cov(X, Y) = \sum_{j=!}^{m} \sum_{k=1}^{r} (x_i - \bar{x}) * (y_k - \bar{y}) * f\left(x_j, y_k\right) = 0{,}08$
d) Bei stochastischer Unabhängigkeit müsste z.B. gelten:
$$0{,}2 * 0{,}4 = 0{,}1$$
Da dies nicht gilt, sind X und Y nicht stochastisch unabhängig.

**Lösung 5.5**

a) Für diese Aufgaben benötigt man die Rechenregeln aus Kapitel 9.6. T2 und T3 sind erwartungstreu mit E(T2)=E(T3)=µ und $VAR(T2) = \frac{1}{4} * (\sigma^2 + \sigma^2)$ und

$$VAR(T3) = \frac{1}{16} * (\sigma^2 + 4\sigma^2 + \sigma^2)$$

b) Siehe a).

**Lösung 5.6**

Für die Null- und die Alternativhypothese gilt:

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad , \quad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

Dies ist ein zweiseitiger Test. Der Annahmebereich der Nullhypothese beträgt:

$$\frac{\sigma_0^2 \chi^2_{\frac{a}{2};n-1}}{n-1} \leq s^2 \leq \frac{\sigma_0^2 \chi^2_{1-\frac{a}{2};n-1}}{n-1}$$

$$\frac{25 * 7{,}26}{15} \leq s^2 \leq \frac{25 * 25}{15}$$

$$12{,}10 \leq s^2 \leq 41{,}67$$

Die Stichprobenvarianz liegt innerhalb des Annahmebereichs, also kann die Nullhypothese nicht verworfen werden.

# Grundlagen der Wirtschaftsmathematik und Statistik

## Übungsklausur Nr.6

**fernuni-online.de**



Soenke Semmelhaack

Schulstraße 2

25377 Kollmar

www.fernuni-online.de

soenke@fernuni-online.de

# Teil I Mathematik

**Aufgabe 6.1**

Berechne die erste Ableitung der folgenden Funktion:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$$

**Aufgabe 6.2**

Gegeben sei die Erlösfunktion

$$E(x) = 4x$$

Und die Kostenfunkton der variablen Kosten:

$$K_v(x) = \frac{1}{3}x^2$$

Berechne die Gesamtkostenfunktion und die Gewinnfunktion. Bestimme das Gewinnmaximum.

**Aufgabe 6.3**

Berechne die Stammfunktion zu folgender Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \cos x$$

**Aufgabe 6 .4**

Berechne das folgende Integral:

$$\int_1^2 (2x^3 + x^2 - 1)dx$$

**Aufgabe 6.5**

Berechne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} * 2 \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 6.6**

Bestimme den mengentheoretischen Durchschnitt des folgenden LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ 14 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

**Aufgabe 6.7**

Berechne das Inverse zu der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 6.8**

Gegeben sei das folgende Simplex Tableau:

| $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −1 | −2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | −1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 6 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 5 |

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

a) Eine Erhöhung von $x_1$ist durch eine Verringerung $x_4$möglich.
b) Im nächsten Simplex Schritt sollte $x_4$ aus der Basis genommen werden, weil diese Variable mit einem Wert von 6 über das größte Potenzial verfügt, den Zielfunktionswert zu steigern.
c) Die aktuelle Lösung ist optimal, da die Zielfunktionszeile nur negative Werte aufweist.
d) Die aktuelle Lösung wird grafisch im x1/x2 Diagramm durch den Nullpunkt repräsentiert.

# Teil II Statistik

**Aufgabe 6.1**

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Ein qualitatives Merkmal kann metrisch und kardinal messbar sein.
b) Beim Übergang von einer metrischen Skala auf eine Ordinalskala gehen Informationen verloren.
c) Metrisch messbare Merkmale können auch auf einer Ordinalskala gemessen werden.
d) Ein Histogramm ist ein Flächendiagramm.
e) Keine der Aussagen ist richtig.

**Aufgabe 6.2**

Es wurden 200 Menschen nach Geschlecht und Haarfarbe befragt.

Berechne den Kontingenzkoeffizienten für folgende Datentabelle:

| Geschlecht\Haar | Hell | Dunkel | Summe |
|---|---:|---:|---:|
| Männlich | 20 | 100 | 120 |
| Weiblich | 50 | 30 | 80 |
| Summe | 70 | 130 | 200 |

**Aufgabe 6.3**

Um einen Universitätsabschluss zu erhalten muss ein Student noch 5 Prüfungen bestehen. Für jede Prüfung hat er drei Versuche. Er besteht jeweils die beim ersten Versuch zu 20%, beim zweiten Versuch zu 40% und beim dritten Versuch zu 75%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt der Student seinen Universitätsabschluss?

**Aufgabe 6.4**

Eine Zufallsvariable X hat den Mittelwert 2 und eine Standardabweichung von 4.

Standardisiere die Zufallsvariable.

**Aufgabe 6.5**

Eine Zufallsvariable X sei normalverteilt mit Erwartungswert 5 und Varianz 25. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallsvariable einen Wert von über 8 annimmt.

**Aufgabe 6.6**

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Eine Schätzfunktion heißt erwartungstreu, wenn der Schätzwert im 95% Konfidenzintervall um den wahren Parameter liegt.
b) Eine Schätzfunktion heißt erwartungstreu, wenn sie immer den wahren Parameter liefert.
c) Eine Schätzfunktion heißt erwartungstreu, wenn ihr Erwartungswert immer dem wahren Parameter entspricht.
d) Von zwei Schätzfunktionen ist die mit der niedrigeren Varianz effizient.
e) Keine der Aussagen ist richtig.

**Aufgabe 6.7**

Gegeben sind die folgenden 4 Zinssätze:

4%, 6%, 10%, 2%.

Berechne das geometrische Mittel.

# Lösungen Teil I

**Lösung 6.1**

Nutzung der Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{1 * (x^2 + 1) - 2x * (x + 1)}{(x^2 + 1)^2}$$

**Lösung 6.2**

Gesamtkostenfunktion:

$$K(x) = \frac{1}{3}x^3$$

Gewinnfunktion:

$$G(x) = E(x) - K(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$$

Das Maximum der Gewinnfunktion bestimmt man über die Nullstelle der ersten Ableitung:

$$G'(x) = -x^2 + 4 = 0$$

$$x = 2$$

**Lösung 6.3**

$$F(x) = \ln x + \sin x + c$$

**Lösung 6.4**

Die Stammfunktion lautet:

$$\frac{1}{2} * x^4 + \frac{1}{3} * x^3 - x + c$$

Damit ergibt sich für das bestimmte Integral:

$$\left[0{,}5x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x\right]_1^2 = 8{,}83 + 0{,}17 = 9$$

**Lösung 6.5**

Berechnung nicht möglich, da Anzahl der Spalten der ersten Matrix nicht gleich Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix.

Man ermittelt zunächst den Rang der 3 x 3 Matrix und der erweiterten 4 x 3 Matrix.

Dazu erzeugt man Einsen in der Hauptdiagonalen und Nullen darunter:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -3/2 & 1 & 7/2 \\ 0 & 5 & -3 & -7 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2/3 & -7/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 14/3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2/3 & -7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

Die Matrizen haben beide den Rang 3 (Die 3x3 Matrix hat vollen Rang). Der mengentheoretische Durchschnitt ist daher ein Punkt.

**Lösung 6.7**

Erzeugen von 1en in der Hauptdiagonale und Nullen ansonsten:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

II-2*I

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

½*II

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \end{array}\right)$$

I-2*II

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \end{array}\right)$$

**Lösung 6.8**

a) Richtig. $x_4$wird durch die dritte Zeile repräsentiert und in dieser Zeile hat $x_1$ einen positiven Wert.
b) Falsch. Der Wert der RHS ist nur ein Parameter bei der Wahl des Pivotelementes.
c) Falsch. Alle Werte der Zielfunktionszeile müssten positiv sein.
d) Richtig. $x_1$und $x_2$sind beide nicht in der Basis.

# Lösungen Teil II

**Lösung 6.1**

a) Falsch. Es kann nur nominal messbar sein.
b) Richtig.
c) Richtig.
d) Richtig.
e) Falsch.

**Lösung 6.2**

Hier musst du einfach die richtige Formel finden und einsetzen:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{r} \frac{\left(h(x_j, y_k) - \frac{h(x_j) * h(y_k)}{n}\right)^2}{\frac{h(x_j) * h(y_k)}{n}}$$

$$= \frac{\left(20 - \frac{70 * 120}{200}\right)^2}{\frac{70 * 120}{200}} + \cdots = 44{,}32$$

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}} = \sqrt{\frac{44{,}32}{100 + 44{,}32}} = 0{,}43$$

**Lösung 6.3**

Zunächst berechnet man die Wahrscheinlichkeit eine Prüfung zu bestehen:

$$0{,}2 + 0{,}8 * 0{,}4 + 0{,}8 * 0{,}6 * 0{,}75 = 0{,}88$$

Den Universitätsabschluss bekommt der Student, wenn er alle Prüfungen besteht.

$$0{,}88 * 0{,}88 * 0{,}88 * 0{,}88 * 0{,}88 = 0{,}53$$

**Lösung 6.4**

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 2}{4}$$

**Lösung 6.5**

Man berechnet zunächst die Wahrscheinlichkeit von $x \leq 8$:

Standardisieren:

$$Z = \frac{8 - 5}{5} = 0{,}6$$

Der entsprechende Wert der Standardnormalverteilung beträgt:

$$\Phi_{0;1}(0{,}6) = 0{,}72575$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt $1 - 0{,}72575 = 0{,}27425$

**Lösung 6.6**

a) Falsch.
b) Falsch.
c) Richtig.
d) Falsch. Es fehlen Angaben über die Erwartungstreue.

**Lösung 6.7**

$$\sqrt[4]{1{,}04 * 1{,}06 * 1{,}1 * 1{,}02} - 1 = 5{,}46\%$$

# Grundlagen der Wirtschaftsmathematik

# und Statistik

## Übungsklausur Nr.7

**fernuni-online.de**



Soenke Semmelhaack

Schulstraße 2

25377 Kollmar

www.fernuni-online.de

soenke@fernuni-online.de

# Teil I Mathematik

**Aufgabe 7.1**

Gegeben sei die Funktion:

$$f(x) = 2x^2 + \frac{x}{a}$$

Für welches a hat die Funktion eine Extremstelle bei x=2?

**Aufgabe 7.2**

Berechne das folgende Integral:

$$\int_0^2 3(2x+1)^2 dx$$

**Aufgabe 7.3**

Gegeben seien die folgenden drei Vektoren:

$$\left\{\begin{pmatrix}2\\4\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\6\\16\end{pmatrix}\right\}$$

Stelle den Vektor $x = \begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren dar.

**Aufgabe 7.4**

Bestimme den Rang der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\4 & 1 & 1\\3 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

**Aufgabe 7.5**

Berechne das Inverse zu der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 0\end{pmatrix}$$

**Aufgabe 7.6**

Gegeben sei das folgende Simplex Tableau:

| $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $-1$ | $-2$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $0$ | $-1$ | $1$ | $1$ | $0$ | $0$ | $1$ |
| $0$ | $1$ | $0$ | $0$ | $1$ | $0$ | $6$ |
| $0$ | $0$ | $1$ | $0$ | $0$ | $1$ | $5$ |

a) Ist die aktuelle Lösung optimal? Begründe.

b) Bestimme die Pivotspalte des nächsten Simplex Schrittes.

**Aufgabe 7.7**

Berechne die Stammfunktion zu folgender Funktion:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4}{x}$$

**Aufgabe 7.8**

Berechne den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + \sin x}{e^x - 1}$$

# Teil II Statistik

**Aufgabe 7.1**

Welches der folgenden Merkmale ist quantitativ?

a) Telefonnummer.
b) Körpergröße.
c) Automarke.
d) Anzahl an Klausuraufgaben einer Statistikklausur.
e) Blutgruppe.

**Aufgabe 7.2**

Gegeben sind folgende Ausprägungen eines Merkmals:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 3 | 4 | 5 | 8 |

Berechne den Variationskoeffizienten.

**Aufgabe 7.3**

Gegeben sei die Regressionsfunktion

$$\hat{y} = a + bx = 5 + 10x$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Die Regressionsfunktion ermittelt exakte Werte für y.
b) Wird x um eine Einheit erhöht, so erhöht sich $\hat{y}$ um 10.
c) Wird x um eine Einheit erhöht, so wird $\hat{y}$ verzehnfacht.
d) Es besteht auf jeden Fall ein starker linearer Zusammenhang zwischen x und y.
e) Es besteht ein positiver Zusammenhang zwischen x und y.

**Aufgabe 7.4**

Gegeben seien zwei Zufallsvariablen X und Y mit folgenden Parametern:

$$VAR(X) = 2$$

$$VAR(Y) = 3$$

$$VAR(X + Y) = 9$$

a) Sind X und Y stochastisch unabhängig?
b) Berechne $VAR(2X + Y)$.

**Aufgabe 7.5**

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

a) Mit der Maximum Likelihood Methode wird μ so geschätzt, dass die Summe der Quadrate der Abweichungen der Stichprobenwerte vom Schätzwert maximiert wird.
b) Wird die erste Ableitung der Maximum Likelihood Funktion nach dem betrachteten Parameter abgeleitet, dann bezeichnet die Nullstelle dieser Ableitung das Maximum der Funktion.
c) Gibt es bei einer Untersuchung nur 2 mögliche Ergebnisse, so heißt die Grundgesamtheit dichotom.
d) Die Standardnormalverteilung hat den Median 0.
e) Keine der Aussagen ist richtig.

# Lösungen Teil I

**Lösung 7.1**

Die erste Ableitung lautet:

$$f'(x) = 4x + \frac{1}{a}$$

Für einen Extremwert bei x=2 wird diese Funktion an der Stelle x=2 zu 0.

$$8 + \frac{1}{a} = 0$$

$$a = -1/8$$

**Lösung 7.2**

Substitution:

$$2x + 1 = z$$

$$\frac{dz}{dx} = 2$$

$$dx = 0{,}5dz$$

$$\int_0^2 3z^2 * 0{,}5dz = [z^3 * 0{,}5]_0^2$$

Zurück substituieren:

$$[(2x + 1)^3 * 0{,}5]_0^2 = 62{,}5 - 0{,}5 = 62$$

**Lösung 7.3**

Zu lösen ist folgendes Gleichungssystem:

$$2a + 4c = 2$$

$$4a - 2b + 6c = 4$$

$$8a + 2b + 16c = 5$$

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$a = 1 - 2c$$

Eingesetzt in die zweite Gleichung:

$$4 - 8c - 2b + 6c = 4$$

$$b = -c$$

Eingesetzt in die dritte Gleichung:

$$8 - 16c - 2c + 16c = 5$$

$$c = 1{,}5$$

$$b = -1{,}5$$

$$a = -2$$

**Lösung 7.4**

Man berechnet die Determinante nach der Regel von Sarrus:

$$4 * 1 * 1 + 1 * 1 * 3 + 0 * 4 * 0 - (0 * 1 * 3 + 1 * 4 * 2 + 4 * 1 * 0) =$$

$$4 + 3 - 8 = -1$$

Da die Determinante ungleich Null ist, hat die Matrix vollen Rang.

**Lösung 7.5**

Erzeugen von 1en in der Hauptdiagonale und Nullen ansonsten:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

0,5*I

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

II-I

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right)$$

I+II

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right)$$

-2/3*II

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & -2/3 \end{array}\right)$$

**Lösung 7.6**

a) Die aktuelle Lösung ist nicht optimal, da in der obersten Zeile noch negative Werte stehen.
b) Die Pivotspalte ist die Spalte mit dem größten negativen Wert der Zielfunktionszeile (der obersten Zeile). Antwort Spalte $x_2$.

**Lösung 7.7**

Die Funktion kann man auch schreiben als:

$$f(x) = 3x + 4x^{-1}$$

$$F(x) = \frac{3}{2}x^2 + 4 * lnx + c$$

**Lösung 7.8**

Regel von L'Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + \cos x}{e^x} = \frac{2}{1} = 2$$

## Lösungen Teil II

**Lösung 7.1**

a) Nicht quantitativ, obwohl es aus Zahlen besteht.
b) Quantitativ.
c) Nicht quantativ
d) Quantitativ.
e) Nicht quantitativ.

**Lösung 7.2**

Der Variationskoeffizient ist der Quotient aus Mittelwert und Standardabweichung.

Mittelwert: 4,2

Standardabweichung: 2,32

Variationskoeffizient: 1,81

**Lösung 7.3**

a) Falsch. Es handelt sich um eine Schätzunktion.
b) Richtig.
c) Falsch.
d) Falsch. Es kann keine Aussage über die Stärke des Zusammenhangs getroffen werden.
e) Richtig.

**Lösung 7.4**

a) Wären X und Y stochastisch unabhängig, dann würde gelten VAR(X+Y)=VAR(X)+VAR(Y). Dies ist nicht der Fall. Daher sind X und Y nicht stochastisch unabhängig.
b) Man muss zunächst die Kovarianz ermitteln.
   Da für stochastisch abhängige Zufallsvariablen gilt:
   $$VAR(aX + bY) = a^2 * VAR(X) + b^2 * VAR(Y) + a * b * COV(X, Y)$$
   folgt $COV(X, Y) = 4$.
   Daher ist
   $$VAR(2X + Y) = 2^2 * 2 + 3 + 2 * 4 = 19$$

**Lösung 7.5**

a) Falsch.
b) Richtig.
c) Richtig.
d) Richtig.

# Grundlagen der Wirtschaftsmathematik

# und Statistik

## Übungsklausur Nr.8

**fernuni-online.de**



Soenke Semmelhaack

Schulstraße 2

25377 Kollmar

www.fernuni-online.de

soenke@fernuni-online.de

# Teil I Mathematik

**Aufgabe 8.1**

Gegeben sei folgende Funktion

$$f(x) = -0{,}5x^2 + 2 + \frac{125}{x}$$

Berechne eine Nullstelle der ersten Ableitung.

**Aufgabe 8.2**

Berechne die Stammfunktion zu folgender Funktion:

$$f(x) = x * e^x$$

**Aufgabe 8.3**

Berechne

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 8.4**

Bestimme den Rang der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 8.5**

Bestimme den mengentheoretischen Durchschnitt des folgenden LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

**Aufgabe 8.6**

Berechne das Inverse zu der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 8.7**

Berechne

$$x = (2 \quad 2) * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

# Teil II Statistik

**Aufgabe 8.1**

Bei einer Liegerung aus 100 Sack Zement soll eine Stichprobe von n=16 gezogen werden und das Sollgewicht von mindestens 25kg überprüft werden. Das Gewicht der Säcke sei normalverteilt mit Varianz =16. Der Stichprobenmittelwert beträgt 26kg.

Kann die Lieferung zum Niveau 0,1 angenommen werden? Auf Endlichkeitskorrektur soll verzichtet werden.

**Aufgabe 8.2**

Eine Zufallsvariable X sei normalverteilt mit Erwartungswert 5 und Varianz 25. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallsvariable einen Wert von über 8 oder unter 2 annimmt.

**Aufgabe 8.3**

Gegeben sei folgende Verteilungsfunktion:

$$F_X = \begin{cases} 0 \; für \; x < 0 \\ 0{,}3 \; für \; 0 \leq x < 0{,}3 \\ 0{,}6 \; für \; 0{,}3 \leq x < 0{,}5 \\ 1 \; für \; 0{,}5 \leq x \end{cases}$$

Berechne

a) $P(x \leq 0{,}5)$

b) $P(x \leq 1)$

c) $P(0{,}3 \leq x < 0{,}5)$

**Aufgabe 8.4**

Seien A und B beliebige Ereignisse. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

a) $P(A \cap B) = P(A) * P(B|A)$
b) $P(A \cup B) = 1 - \big(1 - P(A)\big) * \big(1 - P(B)\big)$
c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
d) $P(A) + P(B)$ ist immer kleiner 1.
e) $P(A \cap B)$ ist immer kleiner 1.

**Aufgabe 8.5**

5 Studenten schreiben die Mathe und die Externes Rechnungswesen Klausur. Folgende Punktzahlen werden erreicht:

| Student Nr. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Mathe | 30 | 55 | 60 | 66 | 85 |
| Ext. Rewe | 50 | 33 | 55 | 60 | 52 |

Berechne den Spearmanschen Rangkorrelationskoeffizienten.

**Aufgabe 8.6**

Gegeben sind zwei unabhängige Zufallsvariablen X und Y mit folgenden Parametern:

$$E(X) = 2$$

$$E(Y) = 4$$

$$VAR(X) = 4$$

$$VAR(Y) = 9$$

a) Berechne VAR(2X-3)
b) Berechne VAR(2X+Y)
c) Berechne E(X+2Y)

# Lösungen Teil I

**Lösung 8.1**

Die erste Ableitung dieser Funktion ist:

$$f'^{(x)} = -x - \frac{125}{x^2}$$

Die Nullstelle liegt bei $x = -5$.

**Lösung 8.2**

Partielle Integration:

$$\int u * v' = u * v - \int u' * v$$

$$u = x$$

$$v = e^x$$

$$u' = 1$$

$$v' = e^x$$

$$\int x * e^x = x * e^x - \int 1 * e^x dx = x * e^x - e^x + c$$

**Lösung 8.3**

Berechnung nicht möglich, da Zeilen- und Spaltenrang der ersten Matrix nicht denen der zweiten entspricht.

**Lösung 8.4**

Man berechnet die Determinante nach der Regel von Sarrus:

$$3 * 4 * 2 + 2 * 8 * 0 + 1 * 6 * 0 - (1 * 4 * 0 + 2 * 6 * 2 + 3 * 8 * 0) =$$

$$24 - 24 = 0$$

Die Determinante ist Null. Der Rang der Matrix ist also nicht 3. Da die ersten beiden Zeilen linear unabhängig sind, ist der Rang 2.

**Lösung 8.5**

Man ermittelt zunächst den Rang der 3 x 3 Matrix und der erweiterten 4 x 3 Matrix.

Den Rang der 3x3 Matrix kann man über die Determinante ermitteln oder direkt erkennen, dass die drei Zeilen nicht linear unabhängig sind (III=4*I+II). Der Rang ist 2. Durch die Erweiterung mit dem Vektor B steigt der Rang nicht. Da der Rang der erweiterten Matrix 1 unter Maximalrang ist, ist der mengentheoretische Durchschnitt eine Gerade.

**Lösung 8.6**

Erzeugen von 1en in der Hauptdiagonale und Nullen ansonsten:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

0,5*I

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

II-I

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right)$$

2*II

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

I-0,5*II

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

**Lösung 8.7**

$$x = 2 * 1 + 2 * 2 + 2 * 0 + 2 * 1 = 8$$

# Lösungen Teil II

**Lösung 8.1**

Als Nullhypothese wählt man:

$$H_0: \mu < \mu_0$$

gegen

$$H_1: \mu \geq \mu_0$$

Der Annahmebereich für die Nullhypothese ist:

$$\bar{X} < \mu_0 + z_{1-a}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{X} < 25 + 1{,}28\frac{4}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{X} < 26{,}28$$

Die Nullhypothese kann nicht abgelehnt werden.

**Lösung 8.2**

Man berechnet zunächst die Wahrscheinlichkeit von $x \leq 8$:

Standardisieren:

$$Z = \frac{8-5}{5} = 0{,}6$$

Der entsprechende Wert der Standardnormalverteilung beträgt:

$$\Phi_{0;1}(0{,}6) = 0{,}72575$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt $1 - 0{,}72575 = 0{,}27425$

Da das Intervall symmetrisch um den Mittelwert liegt, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $2 * 0{,}27425 = 0{,}5485$.

**Lösung 8.3**

a) $P(x \leq 0{,}5) = 0{,}6$
b) $P(x \leq 1) = 1$
c) $P(0{,}3 \leq x < 0{,}5) = 0{,}6 - 0{,}3 = 0{,}3$

**Lösung 8.4**

a) Richtig.
b) Richtig.
c) Richtig.
d) Falsch. Die Wahrscheinlichkeiten können sich überschneiden.
e) Richtig.

**Lösung 8.5**

Zunächst müssen die Ränge berechnet werden:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Student Nr. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Mathe | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| Ext Rewe | 4 | 5 | 2 | 1 | 3 |

Nun müssen die Mittelwerte ermittelt werden:

$$\overline{rg}_X = \overline{rg}_Y = 3$$

Nun müssen die Werte nur noch in die Formel für den Spearmanschen Rangkorrelationskoeffizienten eingesetzt werden. Im einzelnen ergibt sich:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(rg(x_i) - \overline{rg}_X\right)\left(rg(y_i) - \overline{rg}_Y\right)$$
$$= (5-3)*(4-3) + (4-3)*(5-3) + (3-3)*(2-3) + (2-3)*(1-3) + (1-3)*(3-3) = 6$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(rg(x_i) - \overline{rg}_X\right)^2 = 10$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(rg(y_i) - \overline{rg}_Y\right)^2 = 10$$

$$\frac{6}{\sqrt{10*10}} = 0{,}6$$

**Lösung 8.6**

a) $2^2 * 4 = 16$
b) $2^2 * 4 + 9 = 25$
c) $2 + 2 * 4 = 10$

# Grundlagen der Wirtschaftsmathematik

# und Statistik

## Übungsklausur Nr.9

**fernuni-online.de**



Soenke Semmelhaack

Schulstraße 2

25377 Kollmar

www.fernuni-online.de

soenke@fernuni-online.de

# Teil I Mathematik

**Aufgabe 9.1**

Gegeben sei folgende Kostenfunktion:

$$K(x) = x^3 - 10x^2 + 28x + 10$$

Berechne die Kostenminimale Gütermenge.

**Aufgabe 9.2**

Berechne die Stammfunktion zu folgender Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

**Aufgabe 9.3**

Berechne:

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 9.4**

Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?

$$w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 9.5**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 9.6**

Berechne:

$$(1 \quad 4 \quad 1) * \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 9.7**

Bestimme den mengentheoretischen Durchschnitt des folgenden LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

**Aufgabe 9.8**

Berechne das Inverse zu der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

# Teil II Statistik

**Aufgabe 9.1**

Ein Investor legt sein Kapital 2 Jahre an. Die Zinsen betragen:

Jahr 1: 4%

Jahr 2: 5%

Berechne den durchschnittlichen Zinssatz.

**Aufgabe 9.2**

Die folgende Tabelle gibt den Durchschnittsverbrauch pro 100 km und die jeweils gefahrene Strecke eines Autofahrers an. Berechne den Durchschnittsverbrauch pro 100 km der Gesamtstrecke.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Durchschnittsverbrauch | 10,2 | 9,5 | 10 | 10,5 | 9 |
| Strecke | 100 | 150 | 200 | 100 | 120 |

**Aufgabe 9.3**

Die Zufallsvariable X hat den Erwartungswert 4 und die Varianz 16. Die genaue Verteilung ist nicht bekannt.

Gib an in welchen, um den Mittelwert symmetrischen, Intervall X mit mindestens 90% fallen wird.

**Aufgabe 9.4**

Gegeben ist die Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^3 \; für \; 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \qquad\qquad sonst \end{cases}$$

Berechne $F_X$.

**Aufgabe 9.5**

Welche der folgenden Aussagen über Hypothesentests sind richtig?

a) Führt ein Test zur Annahme der Nullhypothese, so ist diese statistisch gesichert zum Niveau a.
b) Bei einer zweiseitigen Nullhypothese $H_0: \mu = \mu_0$ wird der Annahmebereich unter der Annahme $\mu = \mu_0$ berechnet.
c) Ein Fehler 2ter Art bedeutet die Entscheidung für die Nullhypothese, obwohl die Gegenhypothese gilt.
d) Eine richtige Nullhypothese wird mit maximal $a$ abgelehnt.
e) Keine der Aussagen ist richtig.

**Aufgabe 9.6**

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Aus einer Menge unverzerrter Schätzfunktionen ist die effizient, die den mittleren quadratischen Fehler minimiert.
b) Eine erwartungstreue Schätzfunktion ist effizient, wenn sie minimale Varianz hat. Richtig.
c) Eine Schätzfunktion ist eine Zufallsvariable.
d) Eine Stichprobenfunktion ist eine Zufallsvariable.
e) Keine der Aussagen ist richtig.

# Lösungen Teil I

**Lösung 9.1**

Gesucht ist die Nullstelle der ersten Ableitung.

$$K'(x) = 3x^2 - 20x + 28 = 0$$

Die Lösung kann man mit der p-q-Formel berechnen. In den allermeisten Fällen kann man sie aber auch raten/ablesen.

In diesem Fall ergibt sich:

$$x = 2$$

**Lösung 9.2**

Diese Funktion sollte man anders schreiben:

$$f(x) = x^{-0,5}$$

$$F(x) = 2x^{0,5} + c$$

**Lösung 9.3**

$$x = 2 + 6 + 3 = 11$$

**Lösung 9.4**

4 Vektoren im $R^3$ sind immer linear abhängig.

**Lösung 9.5**

Berechnung nicht möglich, da Anzahl der Spalten der ersten Matrix nicht gleich Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix.

**Lösung 9.6**

$$\begin{pmatrix} 3 & 18 \end{pmatrix}$$

Die 3 ergibt sich z.B. aus: $1 * 2 + 4 * 0 + 1 * 1 = 3$.

**Lösung 9.7**

Man ermittelt zunächst den Rang der 3 x 3 Matrix und der erweiterten 4 x 3 Matrix.

Den Rang der 3x3 Matrix kann man über die Determinante ermitteln oder direkt erkennen, dass die drei Zeilen nicht linear unabhängig sind (III=4*I+II). Der Rang ist 2. Durch den Vektor b steigt der Rang auf drei. Das Gleichungssystem ist nicht lösbar.

**Lösung 9.8**

Erzeugen von 1en in der Hauptdiagonale und Nullen ansonsten:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

0,5*I

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

II-2*I

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

0,5*II

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

I-II

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

# Lösungen Teil II

**Lösung 9.1**

Hier ist nach dem harmonischen Mittel gefragt.

$$\sqrt{1{,}04 * 1{,}05} - 1 = 4{,}5\%$$

**Lösung 9.2**

Es werden insgesamt 670 km gefahren. Der jeweilige Verbrauch muss nun mit der gefahrenen Strecke gewichtet werden.

$$\frac{100}{670} * 10{,}2 + \frac{150}{670} * 9{,}5 + \frac{200}{670} * 10 + \frac{100}{670} * 10{,}5 + \frac{120}{670} * 9 = 9{,}81$$

**Lösung 9.3 (nicht mehr klausurrelevant)**

Nach Tschebyscheff gilt:

$$P(\mu - c\sigma \leq X \leq \mu + c\sigma) \geq 1 - \frac{1}{c^2}$$

$P(\mu - c\sigma \leq X \leq \mu + c\sigma)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass X in das Intervall $\mu - c\sigma \leq X \leq \mu + c\sigma$ fallen wird. Diese Wahrscheinlichkeit soll 90% sein.

$$0{,}9 = 1 - \frac{1}{c^2}$$

Umgeformt nach c ergibt:

$$c = \sqrt{10}$$

Eingesetzt in die Tschebyscheff Ungleichung:

$$P\left(4 - 16 * \sqrt{10} \leq X \leq 4 + 16\sqrt{10}\right) \geq 0.9$$

Das Intervall ist -46,60 bis 54,6.

**Lösung 9.4**

$F_X$ist die Stammfunktion zu $f_X(x)$ und nimmt Werte zwischen 0 und 1 an.

$$F_X = \begin{cases} 0\ f\text{ür}\ x < 0 \\ 0{,}5x^4\ f\text{ür}\ 0 \leq x \leq 1 \\ 1\ f\text{ür}\ x > 1 \end{cases}$$

**Lösung 9.5**

a) Falsch. Nur die Gegenhypothese kann statistisch gesichert werden.
b) Richtig.
c) Richtig.
d) Richtig.

**Lösung 9.6**

a) Richtig.
b) Richtig.
c) Richtig.
d) Richtig.

# Grundlagen der Wirtschaftsmathematik

# und Statistik

## Übungsklausur Nr.10

**fernuni-online.de**



Soenke Semmelhaack

Schulstraße 2

25377 Kollmar

www.fernuni-online.de

soenke@fernuni-online.de

# Teil I Mathematik

**Aufgabe 10.1**

Berechne die Fläche, die zwischen den Funktionen

$$f(x) = x^2$$

und

$$g(x) = 2x$$

Im Intervall 1 bis 2 eingeschlossen wird.

**Aufgabe 10.2**

Berechne x, sodass es Komponente eines normierten Vektors ist:

$$\begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}3 \\ x \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 10.3**

Berechne

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 10.4**

Berechne

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} * 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 10.5**

Bestimme den mengentheoretischen Durchschnitt des folgenden LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

**Aufgabe 10.6**

Bestimme den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 10.7**

Berechne den Abstand des Punktes $\binom{2}{2}$von der Gerade $(4 \quad 3)\binom{x_1}{x_2} - 2 = 0.$

Liegt der Punkt in Richtung des Orthogonalenvektors?

# Teil II Statistik

**Aufgabe 10.1**

Eine Zufallsvariable X sei normalverteilt mit Erwartungswert 5 und Varianz 25. Bestimme Intervall, das symmetrisch um den Mittelwert liegt und in das X zu 50% fallen wird.

**Aufgabe 10.2**

Gegeben sind 10 unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen $X_i$ , die alle den Erwartungswert 2 und Varianz 1 haben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt die Summe dieser Zufallsvariablen einen Wert unter 21 an?

**Aufgabe 10.3**

Bei der Produktion von Glasflaschen darf maximal jede 50te eine Normabweichung aufweisen. Angenommen 5% aller Glasflaschen weichen von der Norm ab und es wird eine Stichprobe von 50 Stück entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit weichen nur eine oder weniger Glasflaschen aus der Stichprobe von der Norm ab?

**Aufgabe 10.4**

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Parameter, die aus Stichproben ermittelt werden, sind Zufallsvariablen.

b) Für erwartungstreue Schätzfunktionen ist der mittlere quadratische Fehler gleich der Varianz.

c) Die Stichprobenvarianz $S^2 * \frac{n}{n-1}$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für die Varianz der Grundgesamtheit.

d) Bei endlichen Grundgesamtheiten braucht zwischen „Ziehen mit Zurücklegen“ und „Ziehen ohne Zurücklegen“ nicht unterschieden zu werden.

**Aufgabe 10.5**

a) Die Grenzen eines Konfidenzintervalls sind Stichprobenfunktionen.
b) Je höher das Konfidenzniveau, desto breiter das Konfidenzintervall.
c) Je höher der Stichprobenumfang, desto kleiner das Konfidenzintervall.
d) Die Grenzen eines Konfidenzintervalls sind fest vorgegeben.
e) Keine der Aussagen ist richtig.

**Aufgabe 10.6 (nicht mehr klausurrelevant)**

Eine Zufallsvariable hat Erwartungswert 5 und Standardabweichung 2. Die genaue Verteilung ist nicht bekannt. Schätze mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyscheff mit welcher Wahrscheinlichkeit X mehr als 1 von seinem Mittelwert abweicht.

# Lösungen Teil I

**Lösung 10.1**

Da die beiden Funktionen jeweils einen Schnittpunkt bei x=0 und x=2 haben entspricht die eingeschlossene Fläche der Differenz der Stammfunktionen im Intervall 1 bis 2.

$$\left[\frac{1}{3}x^3 + c - (x^2 + c)\right]_1^2 = -2$$

Da Flächen nicht negativ sein können, ist die eingeschlossene Fläche 2.

**Lösung 10.2**

Ein normierter Vektor hat die Länge 1.

$$1 = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}3^3 + x^2}$$

$$x = 0{,}93$$

**Lösung 10.3**

Berechnung nicht möglich, da Anzahl der Spalten der ersten Matrix nicht gleich Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix.

**Lösung 10.4**

$$\begin{pmatrix} 6 & 36 \end{pmatrix}$$

**Lösung 10.5**

Man ermittelt zunächst den Rang der 3 x 3 Matrix und der erweiterten 4 x 3 Matrix.

Den Rang der 3x3 Matrix kann man über die Determinante ermitteln:

$$2 * 2 * 0 + 1 * 1 * 3 + 0 * 4 * 4 - (0 * 2 * 3 + 1 * 4 * 0 + 2 * 1 * 4) =$$

$$3 - 8 = -5$$

Die Determinante ist ungleich Null. Daher hat die Matrix vollen Rang. Der mengentheoretische Durchschnitt ist ein Punkt.

**Lösung 10.6**

1) Das Element $a_{11}$ist ungleich Null, daher

2) teilen wir durch 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 4 & 9 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3) Um unter dem Element $a_{11}$ Nullen zu erzeugen, wird das 4-fache ($a_{21} = 4$) der ersten Zeile von der zweiten abgezogen und das 1-fache ($a_{31} = 1$) der ersten Zeile von der dritten Zeile abgezogen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Wir beginnen wieder mit 1), versuchen aber nun an der Stelle $a_{22}$ eine Eins zu erzeugen.

4.1) $a_{22}$ ist ungleich Null und daher

4.2) teilen wird Zeile 2 durch 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

4.3) Um unter $a_{22}$ eine Null zu erzeugen, wird das (-1,5)-fache der zweiten Zeile von der dritten subtrahiert.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5) Da keine Zeilenvektoren komplett aus Nullen bestehen, hat die Matrix vollen Rang!

**Lösung 10.7**

Erstellen der Hesseschen Normalform:

$$\|a\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\frac{4}{5} * x_1 + \frac{3}{5} * x_2 - \frac{2}{5} = 0$$

Einsetzen des Punktes:

$$\frac{4}{5} * 2 + \frac{3}{5} * 2 - \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$$

Der Abstand ist positiv->Der Punkt liegt in Richtung des Orthogonalenvektors.

# Lösungen Teil II

**Lösung 10.1**

Die Normalverteilung ist symmetrisch.

Zunächst sucht man also den Wert der Standardnormalverteilung, unter dem X zu 75% liegen wird.

$$\Phi_{0;1}(Z) = 0{,}75$$

Dies ist ca.0,67

Jetzt muss Z noch zu X transformiert werden:

$$Z = \frac{X-5}{5} = 0{,}67$$

$$X = 8{,}35$$

Dies ist die ober Grenze. Die untere Grenze beträgt

$$5 - 5 * 0{,}67 = 1{,}65$$

**Lösung 10.2**

Die Summe aus normalverteilten Zufallsvariablen ist wieder normalverteilt. Die Parameter berechnen sich durch Addition (da es keine Faktoren vor den Varianzen gibt, kann auch hier einfach addiert werden).

$$E\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right) = 20$$

$$Var\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right) = 10$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i \leq 21\right) = P\left(Z \leq \frac{21-20}{\sqrt{10}}\right) = \Phi_{0;1}(0{,}32) = 62{,}55\%$$

**Lösung 10.3**

Hier benötigt man die Verteilungsfunktion der Binomialverteilung:

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$n = 50$

$k = 2\% * 50 = 1$

$p = 5\%$

$P_{n;p}(X \leq k) = 27{,}94\%$

**Lösung zu 10.4**

a) Richtig. Die Werte ergeben sich zufällig, da die Stichprobe ja zufällig aus der Grundgesamtheit gezogen wird.

b) Richtig.

c) Richtig.

d) Falsch. Dies ist bei unendlichen Grundgesamtheiten der Fall.

**Lösung 10.5**

a) Richtig. Sie hängen von der Realisation der Stichprobe ab.
b) Richtig.
c) Richtig.
d) Falsch.

**Lösung 10.6 (nicht mehr klausurrelevant)**

Die Ungleichung von Tschebyscheff lautet:

$$P(\mu - c\sigma \leq X \leq \mu + c\sigma) \geq 1 - \frac{1}{c^2}$$

$\mu - c\sigma$ ist die Abweichung vom Mittelwert. Diese darf maximal 1 sein. Es gilt also:

$5 - c * 2 = 1$

Daraus folgt $c = 2$.

Für die Wahrscheinlichkeit, dass X **weniger** als 2 von seinem Mittelwert abweicht folgt dann

$$P(|X - \mu| \leq 1) \geq \frac{3}{4}$$

Dass X mehr als 1 von seinem Mittelwert abweicht, ist entsprechend

$$1 - P(|X - \mu| \leq 1) = P(|X - \mu| > 1) < \frac{1}{4}$$