Dieses Skript ist urheberrechtlich geschützt. Ich behalte mir alle Rechte vor. Eine Vervielfältigung ist nicht gestattet und strafbar.

Hinweise zum Skript „Grundlagen der Wirtschaftsmathematik und Statistik“

Der Aufbau des Skriptes orientiert sich an den Inhalten des Fernuni Skriptes. Die Schwerpunkte wurden auf Inhalte gelegt, die in den Klausuren der letzten Jahre getestet wurden. Der Aufbau ist

1) Zusammenfassung
2) Beispiel
3) Übungsaufgaben

Da es sich um eine Zusammenfassung handelt, kann das Skript natürlich die Fernuni- Unterlagen nicht ersetzen. Da sich aber die Aufgabentypen in den Klausuren ständig wiederholen, ist es möglich mit dem Inhalt dieses Skriptes fast alle Klausuraufgaben der letzten 10 Jahre zu lösen. Ich empfehle dir, die Unterlagen der Fernuni und dieses Skript parallel durchzuarbeiten. Sehr wichtig ist es auch das Übungsprogramm der Fernuni zu nutzen. Neben den Aufgaben im Skript gibt es für Mathematik eine Aufgabensammlung auf der website des Lehrstuhls.

Außerdem solltest du stets das Glossar der Fernuniversität zur Hand haben und alle Begriffe, die du nicht kennst, dort nachlesen. Du benötigst für dieses Skript nur geringe mathematische Vorkenntnisse. Sollte Dir dennoch eine der Grundlagen fehlen, so kannst du mir gerne eine email an soenke@fernuni-online.de senden.

Viel Spaß beim Lesen und viel Erfolg bei der Klausur!

Soenke Semmelhaack

Inhaltsverzeichnis

1.1 Vektorrechnung 8

Übungsaufgaben zu 1.1 11

Lösungen zu 1.1 13

1.2 Lineare (Un-)Abhängigkeit 15

Übungsaufgaben zu 1.2 18

Lösungen zu 1.2 19

1.3 Normierung eines Vektors, Hessesche Normalform 22

Übungsaufgaben zu 1.3 24

Lösungen zu 1.3 25

1.4. Matrizenrechnung 27

Übungsaufgaben zu 1.4 31

Lösungen zu 1.4 32

1.5. Ökonomische Verwendung von Matrizen 33

Übungsaufgaben zu 1.5 37

Lösungen zu 1.5 38

1.6. Der Rang einer Matrix 39

Übungsaufgaben zu 1.6 41

Lösungen zu 1.6 42

2.1. Lineare Gleichungssysteme 43

Übungsaufgaben zu 2.1 47

Lösungen zu 2.1 48

2.2. Invertieren einer Matrix 50

Übungsaufgaben zu 2.2 52

Lösungen zu 2.2 53

2.3. Lineare Planungsrechnung 56

Übungsaufgaben zu 2.3 61

Lösungen zu 2.3 62

3.0 Finanzmathematische Grundlagen 65

Aufgaben zu 3.0 77

Lösungen zu 3.0 79

4.1 Einführung Differentialrechnung 82

4.2. Die Ableitung einer Funktion 88

Übungsaufgaben zu 4.2 93

Lösungen zu 4.2 94

4.3. Extremstellen 98
Übungsaufgaben zu 4.3 100
Lösungen zu 4.3 101
4.4. Gebrochenrationale Funktionen 103
Übungsaufgaben zu 4.4 104
Lösungen zu 4.4 104
4.5 Monotonieverhalten 105
Übungsaufgaben zu 4.5 105
Lösungen zu 4.5 105
4.6 Grenzwertbestimmung 106
Übungsaufgaben zu 4.6 107
Lösungen zu 4.6 108
4.7. Die systematische Kurvendiskussion 109
Übungsaufgaben zu 4.7 113
Lösungen zu 4.7 113
5.1. Integralrechnung 117
Übungsaufgaben zu 5.1 122
Lösungen zu 5.1 123
5.2. Flächenberechnungen mit Hilfe der Integralrechnung 125
Übungsaufgaben zu 5.2 127
Lösungen zu 5.2 128
6.0 Funktionen mehrerer Variabler 131
Aufgaben zu 6.0 144
Lösungen zu 6.0 147
Statistik 155
5.0 Grundbegriffe 155
Aufgaben zu 5.0 160
Lösungen zu 5.0 162
6.0 Lageparameter eindimensionaler Verteilungen 164
Aufgaben zu 6.0 170
Lösungen zu 6.0 173
7. 0 Häufigkeitsverteilungen zweier Merkmale 178
Aufgaben zu 7.0 195
Lösungen zu 7.0 199
8.0 Wahrscheinlichkeitsrechnung 204

Aufgaben zu 8.0 212
Lösungen zu 8.0 213
9.0 Zufallsvariablen 214
Aufgaben zu 9.0 223
Lösungen zu 9.0 226
10.0 Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen 230
Aufgaben zu 10.0 236
Lösungen zu 10.0 237
11.0 Einfache Schätzverfahren 239
Aufgaben zu 11.0 246
Lösungen zu 11.0 249
12.0 Grundlagen der Testtheorie 253
Aufgaben zu 12.0 257
Lösungen zu 12.0 259
13.0 Spezielle Testverfahren 261
Aufgaben zu 13.0 272
Lösungen zu 13.0 274
Anhang 277
Übungsklausuren **278**

1.1 Vektorrechnung

Kurz zur mathematischen Notation:

- Beliebige, aber feste Vektoren werden **fett** gedruckt.

- Die Komponenten eines Vektors werden untenstehend indiziert. a_1 wäre also die erste Komponente des Vektors $\boldsymbol{a}$.

- Im Fernuni Skript gibt es außerdem eine obere Indizierung, um mehrere verschiedene Vektoren $\boldsymbol{a^1}, \boldsymbol{a^2}, \boldsymbol{a^3}$ voneinander zu unterscheiden.

- Ein hochgestelltes ^{T} bezeichnet die Transposition eines Vektors. Dabei wird aus einem Zeilenvektor (Spaltenvektor) ein Spaltenvektor (Zeilenvektor).

- Einen Vektor mit der Länge 1 nennt man Einheitsvektor.

Addition und Subtraktion von Vektoren:

Bei der Addition oder Subtraktion von Vektoren werden einfach die einzelnen Komponenten addiert/subtrahiert.

Beispiel: $\binom{1}{3} - \binom{2}{5} = \binom{1-2}{3-5} = \binom{-1}{-2}$

Multiplikation mit einem Skalar:

Wird ein Vektor mit einer reellen Zahl multipliziert, so multipliziert man alle Komponenten des Vektors einzeln mit der reellen Zahl.

Beispiel: $2 * \binom{1}{3} = \binom{2*1}{2*3} = \binom{2}{6}$.

Skalarprodukt zweier Vektoren:

Das Skalarprodukt ist das Produkt aus einem Zeilenvektor und einem Spaltenvektor. **Achtung**: Hier ist die Reihenfolge wichtig! Zeilenvektor $*$ Spaltenvektor („inneres Produkt“) ergibt ein völlig anderes Produkt als Spaltenvektor $*$ Zeilenvektor (äußeres Produkt). Zum äußeren Produkt kommen wir später.

Beim Skalarprodukt werden zunächst die Produkte der einzelnen –an gleicher Stelle stehenden- Komponenten gebildet, und diese werden dann summiert.

Man sieht schnell, dass das Skalarprodukt nur berechnet werden kann, wenn die beiden Vektoren die gleiche Komponentenanzahl haben.

Beispiel: $(a_1 a_2) * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

Spezialfall: Stehen 2 Vektoren senkrecht, also im 90° Winkel aufeinander, so ist ihr Skalarprodukt 0. Man sagt sie sind orthogonal zueinander.

Linearkombination

Bei einer Linearkombination werden einer oder mehrere Vektoren mit Skalaren multipliziert und anschließend addiert.

Beispiel:

$$x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

So wäre zum **Beispiel** der Vektor $\binom{1}{2}$ eine Linearkombination aus $\binom{2}{3}$und$\binom{3}{4}$, da gilt $\binom{1}{2} = 2\binom{2}{3} - \binom{3}{4}$.

Dies gilt auch für einzelne Vektoren. Beispielsweise ist auch $\binom{2}{4}$ eine Linearkombination des Vektors $\binom{1}{2}$, da gilt $\binom{2}{4} = 2\binom{1}{2}$.

Länge eines Vektors:

Die Länge eines Vektors ist die Wurzel aus der Summe der Quadrate der einzelnen Komponenten. Vielleicht wird der Satz verständlicher, wenn wir ihn in mathematischer Notation schreiben:

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2}$$

Beispiel: Der Vektor $\binom{2}{3}$ hat die Länge

$$\left\|\binom{2}{3}\right\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

Ein Vektor wird normiert, indem man ihn durch seine Länge (auch „euklidische Norm“) dividiert. Ein normierter Vektor hat also die Länge 1.

Der Vektor $\binom{2}{3}$ auf die Länge 1 normiert läßt sich also schreiben als

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

Der Winkel zwischen zwei Vektoren

Für den Winkel zwischen zwei Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ gilt die Beziehung:

$$\cos(a, b) = \frac{a^T b}{\|a\| * \|b\|}$$

Der Kosinus des Winkels zwischen zwei Vektoren entspricht also dem Skalarprodukt der beiden auf die Länge 1 normierten Vektoren.

Beispiel:

Der Kosinus des Winkels zwischen den beiden Vektoren $\binom{1}{2}, \binom{2}{2}$ beträgt

$$\cos(a, b) = \frac{(1 * 2 + 2 * 2)}{\sqrt{1^2 + 2^2} * \sqrt{2^2+2^2}} = \frac{6}{\sqrt{5} * \sqrt{8}}$$

Übungsaufgaben zu 1.1

Aufgabe 1.1.1

Berechne

$$x = cos\left\{\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Aufgabe 1.1.2

Berechne x, sodass es Komponente eines normierten Vektors ist:

$$\begin{pmatrix}a\\x\end{pmatrix} = LK\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.1.3

Berechne

$$x = (2 \quad 3 \quad 1) * \begin{pmatrix}0\\2\\7\end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.1.4

Berechne

$$cos(a,b) f\ddot{u}r\ a = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.1.5

Berechne x so, dass es Komponente eines normierten Vektors ist.

$$\begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}2\\x\end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.1.6

Berechne

$$(1 \quad 2) * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.1.7

Berechne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.1.8

Berechne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} + 2 * \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösungen zu 1.1

Lösung zu 1.1.1:

$$x = \frac{(2 \quad 4 \quad 6) * \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\right\| * \left\|\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\|} = \frac{2*1+4*2+6*1}{\sqrt{2^2+4^2+6^2} * \sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{16}{\sqrt{56} * \sqrt{6}} = 0{,}87$$

Lösung zu 1.1.2

Ich finde diese Art von Aufgabenstellung etwas schwer verständlich, sie kam aber teilweise in Klausuren dran. Hier ist eigentlich nur gefragt den Vektor $\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$zu normieren.

Länge des Vektors: $\sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$

Daraus folgt: $x = \frac{5}{\sqrt{29}}$

Lösung zu 1.1.3

$$x = 2*0+3*2+1*7 = 13$$

Lösung zu 1.1.4

$$cos(a,b) = \frac{a^T b}{\|a\| * \|b\|} = \frac{(1 \quad 3 \quad 5) * \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}}{\left\|\begin{matrix}1\\3\\5\end{matrix}\right\| * \left\|\begin{matrix}2\\4\\0\end{matrix}\right\|} = \frac{14}{\sqrt{35} * \sqrt{20}} = 0{,}53$$

Lösung zu Aufgabe 1.1.5

Da ein normierter Vektor die Länge 1 hat, muss folgende Gleichung nach x aufgelöst werden:

$$\sqrt{0{,}5^2 + 0{,}2^2 + x^2} = 1$$

$$\sqrt{0{,}29 + x^2} = 1$$

$$0{,}29 + x^2 = 1$$

$$x = \sqrt{0{,}71} = 0{,}84$$

Lösung zu 1.1.6

Multiplikation nicht möglich, da Zeilenrang der ersten Matrix nicht gleich dem Spaltenrang der zweiten Matrix.

Lösung zu Aufgabe 1.1.7

Addition nicht möglich, da ungleicher Spaltenrang.

Lösung zu 1.1.8

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} + 2 * \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -13 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

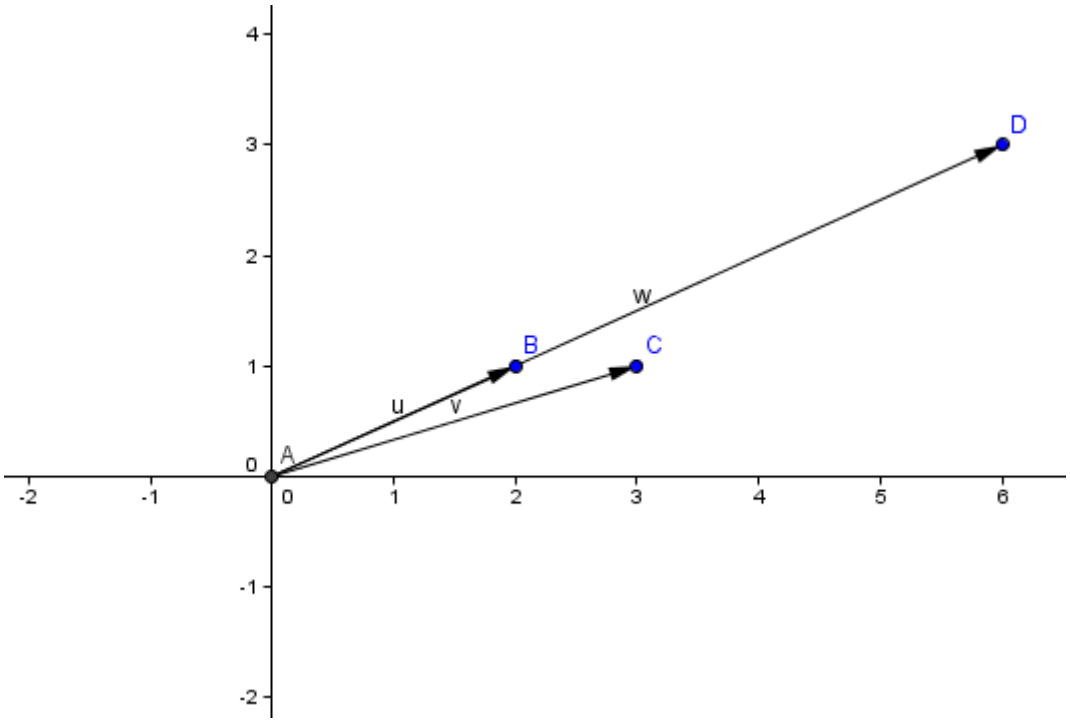
1.2 Lineare (Un-)Abhängigkeit

Ist ein Vektor nicht durch eine Linearkombination eines anderen Vektors (also das Vielfache des anderen Vektors) darstellbar, so sind diese beiden Vektoren linear unabhängig.

Beispiel: Die Vektoren $\binom{1}{3}$ und $\binom{1}{2}$ sind linear unabhängig, da man keinen der Vektoren durch das Vielfache (eine Linearkombination) des anderen Vektors darstellen kann.

Im R^2 bedeutet die lineare Abhängigkeit von 2 Vektoren, dass diese auf einer Gerade liegen. Sind 2 Vektoren linear unabhängig, so spannen sie eine Ebene auf. Da das R^2 eine Ebene ist, kann durch eine Linearkombination zweier linear unabhängiger Vektoren jeder Punkt dieser Ebene erreicht werden und somit auch jeder Vektor des R^2 dargestellt werden. (Es ist wichtig, dass Du das genau verstanden hast!)

Graphisch lässt sich das gut veranschaulichen.



Der Vektor ***u*** läßt sich als Linearkombination von ***w*** darstellen, nicht aber als Linearkombination von ***v***. Damit sind ***u*** und ***v*** linear unabhängig. ***w*** und ***v*** sind ebenfalls linear unabhängig. Mit einer Linearkombination aus ***v*** und ***u*** oder ***v*** und ***w*** läßt sich jeder beliebige Punkt der Ebene erreichen (sie spannen daher eine Ebene auf). Mit einer Linearkombination aus ***w*** und ***u*** aber nur jeder Punkt der Gerade, die durch den Nullpunkt und die Punkte B und D geht.

Mehrere Vektoren sind linear abhängig, wenn sich mindestens einer von Ihnen durch eine Linearkombination der anderen darstellen läßt, ohne dass dabei alle Skalare zwingend Null sind. Müssen alle Skalare gleich Null gewählt werden, so bezeichnet man das als triviale Lösung.

Man sieht schnell, dass drei Vektoren im R^2 immer linear abhängig sind. Drei linear unabhängige Vektoren würden nämlich einen dreidimensionalen Raum aufspannen, was im R^2 natürlich nicht möglich ist.

Mathematisch darf für die Bedingung der linearen Unabhängigkeit für die folgende Gleichung nur die triviale Lösung $a_i = 0$ bestehen:

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x^i}\, a_i$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

Es muss also eine Lösung für das Gleichungssystem:

$$a_1 + a_2 = 0$$

$$2a_1 + 3a_2 = 0$$

gefunden werden. Aus der ersten Gleichung folgt

$$a_1 = -a_2$$

Eingesetzt in die zweite Gleichung:

$$-2a_2 + 3a_2 = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$a_1 = 0$$

Die Vektoren sind also linear unabhängig.

Tipp: Eine andere, viel leichtere Methode, um 2 x 2 oder 3 x 3 Gleichungssysteme auf lineare Unabhängigkeit zu testen, ist die Ermittlung ihrer Determinante. Ist die Determinante ungleich Null, so sind die Vektoren linear unabhängig. Die Berechnung der Determinante wurde zwar im WS 2010/2011 aus dem Kurs gestrichen, da sie aber so nützlich für diesen häufigen Aufgabentyp ist, habe ich die Berechnung der Determinante im Anhang angefügt.

Wie man schon sehen kann, werden die Gleichungssysteme mit der Anzahl der Vektoren auch komplexer (mehr zur Lösung größerer Gleichungssysteme später). Zum Schluss noch einige einfache Zusammenhänge zwischen linearer Abhängigkeit und Anzahl der Vektoren (Diese Punkte musst du verstehen-dies ist nicht zum auswendig lernen):

- Die Linearkombination eines Vektors spannt eine Gerade auf.

- Die Linearkombination zweier linear unabhängiger Vektoren spannt eine Ebene auf.

- Die Linearkombination n linear unabhängiger Vektoren spannen einen n-dimensionalen Raum auf.

- In einem n-dimensionalen Raum können maximal n Vektoren linear unabhängig sein!

- Ist ein Gleichungssystem überbestimmt (mehr Gleichungen als Unbekannte), so sind die Vektoren nicht linear abhängig (Dann gibt es eine unendliche Zahl an Lösungen, was die unendliche Zahl an Linearkombinationen für einen Vektor widerspiegelt).

- Der Nullvektor ist immer linear abhängig von anderen Vektoren (Jede Gerade, die durch eine Linearkombination eines Vektors aufgespannt wird, geht durch den Nullpunkt).

- Eine Menge von Vektoren ist linear unabhängig, wenn die Matrix der zugehörigen Gleichungssystems vollen Rang hat (später mehr dazu).

- Ist die Summe der Skalare einer Linearkombination $= 1$, so spricht man von einer Konvexkombination.

Übungsaufgaben zu 1.2

Aufgabe 1.2.1

Sind folgende Vektoren jeweils linear abhängig?

i) $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\\7\end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-2\\5\end{pmatrix}$

Aufgabe 1.2.2

Stelle $\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ dar.

Aufgabe1.2.3

Sind folgende Vektoren linear abhängig?

$$\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-2\\5\end{pmatrix}$$

Lösungen zu 1.2

Lösung zu 1.2.1

i) Die beiden Vektoren sind linear unabhängig, da der erste Vektor nicht durch ein Vielfaches des zweiten dargestellt werden kann.

ii) Die Vektoren sind linear unabhängig, wenn der Nullvektor nur durch eine Linearkombination der Vektoren erzeugt werden kann, bei der alle Skalare $= 0$ sind.

Konkret muß das folgende Gleichungssystem gelöst werden:

$$a * \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + b * \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + c * \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In Gleichungsform:

$$3a + 2b - c = 0$$

$$-2a - 2c = 0$$

$$1a - 3b + 7c = 0$$

Es gibt nun verschiedene Methoden dieses Gleichungssystem zu lösen. Läßt es sich eindeutig lösen, ohne dass zwingend $a = b = c = 0$ folgt, sind die Vektoren linear abhängig.

In diesem Fall ergibt sich aus der zweiten Gleichung:

$$a = -c$$

Eingesetzt in die erste Gleichung ergibt sich:

$$4a + 2b = 0$$

Und für die dritte Gleichung:

$$-6a - 3b = 0$$

Wählt man $a = 1$, so folgt $c = -1$ und $b = -2$.

Daher sind die Vektoren linear abhängig.

iii) Die Vektoren sind linear unabhängig, wenn der Nullvektor nur durch eine Linearkombination der Vektoren erzeugt werden kann, bei der alle Skalare $= 0$ sind.

Konkret muss das folgende Gleichungssystem gelöst werden:

Aus

$$a * \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + b * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c * \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

folgt

I: $4a + 2b - 2c = 0$

II: $-2a + b - 2c = 0$

III $3a - b + 5c = 0$

Dieses Gleichungssystem kann durch Umformen und Einsetzen gelöst werden.

Aus Gleichung 1 folgt

$$c = 2a + b$$

Eingesetzt in Gleichung 2 folgt

$$-2a + b - 4a - 2b = -6a - 1b = 0$$

und eingesetzt in Gleichung 3 folgt

$$3a - b + 10a + 5b = 13a + 4b = 0$$

Einmal ergibt sich zwingend $a = -\frac{1}{6}b$ und einmal $a = \frac{-4}{13}b$.

Das Gleichungssystem ist nicht lösbar. Somit sind die Vektoren linear unabhängig.

Eine alternative Lösung wäre die Ermittlung der Determinante:

$$4 * 1 * 5 + 2 * (-2) * 3 + (-2) * (-2) * (-1) — 2 * 1 * 3 - 2 * (-2) * 5 - 4 * (-2) * (-1) = 22$$

Da 22≠0 sind die Vektoren linear unabhängig. (Zur Berechnung der Determinante, siehe Anhang)

Lösung zu 1.2.2

Zu lösen ist folgendes Gleichungssystem

$$2a + 3b + c = 1$$

$$-2b + 2c = -2$$

$$a + 4b + c = 4$$

Aus Gleichung II folgt $c = b - 1$. Eingesetzt in Gleichung I folgt

$$2a + 3b + b - 1 = 1$$

Daraus folgt

$$a = -2b + 1$$

Eingesetzt in Gleichung III folgt

$$-2b + 1 + 4b + b - 1 = 4$$

Daraus folgt

$$b = \frac{4}{3}$$

Eingesetzt in Gleichung II folgt

$$-\frac{8}{3} + 2c = -2$$

$$c = \frac{1}{3}$$

Eingesetzt in Gleichung I folgt

$$2a + 4 + \frac{1}{3} = 1$$

$$a = -\frac{5}{3}$$

Die Linaerkombination ist dann

$$-\frac{5}{3}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{4}{3}\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$$

Lösung zu 1.2.3

Vier Vektoren im R^3sind immer linear abhängig.

1.3 Normierung eines Vektors, Hessesche Normalform

Hessesche Normalform

Vorweg eine kurze Begriffsdefinition:

Es gibt verschiedene Formen eine Gerade darzustellen:

- die Punkt-Steigungsform: $y = ax + b$

- die Achsenabschnittsform: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

- die Koordinatenform: $ay + bx = c$ bzw. $ay + bx - c = 0$

Ausgangsbasis für die Berechnung der Hesseschen Normalform sollte die Koordinatenform sein.

Die Hessesche Normalform einer Gleichung beschreibt eine Gerade im R^2 oder eine Ebene im R^3.

Im Folgenden bilden wir die Hessesche Normalform einer Geraden im R^2:

Dazu muss man erst einmal die Geradengleichung in Vektorschreibweise darstellen:

Aus

$$y = 3x + 2$$

wird durch Umformung

$$3x - y + 2 = 0$$

und in Vektorschreibweise (wir setzen $x = x_1$ und $y = x_2$)

$$(3 \ -1) * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2 = 0$$

Allgemein schreibt man

$$\boldsymbol{a^T x - b = 0}$$

(Das hochgestellte T bedeutet, dass dieser Vektor transponiert wird)

Die Hessesche Normalform erhält man, indem man die Geradengleichung auf die Länge des Vektors $\boldsymbol{a}$ normiert.

$$\frac{\boldsymbol{a^T x}}{\|\boldsymbol{a}\|} - \frac{\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|} = 0$$

Die Hessesche Normalform kann nun dazu verwendet werden, den Abstand eines Punktes P von der Geraden zu bestimmen. Dazu setzt du nur die Koordinaten des Punktes P in **x** ein. Die linke Seite der Gleichung liefert dann den Abstand zwischen Punkt und Gerade.

Beispiel: Der Abstand des Punktes *(2 ,2)* von der Gerade

$$(3\ \ -1) * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2 = 0$$

errechnet sich folgendermaßen:

Länge des Vektors $\boldsymbol{a}$:

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

Abstand zwischen Punkt und Gerade:

$$\frac{(3\ \ -1) * \binom{2}{2} + 2}{\sqrt{10}} = \frac{3 * 2 - 2}{\sqrt{10}} + \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}} + \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{6}{\sqrt{10}}$$

Ist der Abstand des Punktes von der Geraden > 0, so liegt er auf der Seite der Geraden, in die der Vektor $\boldsymbol{a}$ zeigt.

Nun werden noch einige Begriffe eingeführt, die du für die Klausur beherrschen solltest:

- Hyperebene: Eine Gerade im R^2 oder eine Ebene im R^3 bzw. jeder Raum der Dimension n-1 im R^n ist eine Hyperebene.

- Orthogonalenvektor: Ein Vektor, der senkrecht auf der Gerade steht, ist ihr Orthogonalenvektor.

- Orthonormalenvektor: Ein auf 1 normierter Vektor, der senkrecht auf der Gerade steht, ist ihr Orthonormalenvektor.

Achtung: Im Fernuni Skript wird auch die folgende Schreibweise der Hesseschen Normalform gegeben:

$$\frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{a}\|} - \frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{s}}{\|\boldsymbol{a}\|} = 0$$

Wobei **s** ein beliebiger Vektor zu einem Punkt auf der Gerade ist (Stützvektor). Sollte in einer Aufgabe ein beliebiger Stützvektor $\boldsymbol{s}$ und Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{x}$ (die Koordinaten des Punktes) gegeben sein, musst du nur entsprechend einsetzen und erhälst den Abstand zwischen Punkt und Gerade.

Übungsaufgaben zu 1.3

Aufgabe 1.3.1

Stelle folgende Gleichung in der Punkt-Steigungsform ($y = ax + b$) dar:

$$(1 \quad -1) * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2 = 0$$

Aufgabe 1.3.2

Berechne den Abstand des Punktes P von der Gerade G und gib an auf welcher Seite der Geraden der Punkt liegt.

$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $G: x_1 + 2x_2 + 1 = 0$

Aufgabe 1.3.3

Berechne den Abstand des Punktes P von der Hyperebene E:

$P = (1{,}2{,}4)$ $\qquad$ $E = (2 \quad 4 \quad 1) * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - 2 = 0$

Lösungen zu 1.3

Lösung zu 1.3.1

Durch Ausmultiplizieren der Vektoren erhält man:

$$x_1 - x_2 + 2 = 0$$

Auflösen nach der Variablen x_2:

$$x_2 = x_1 + 2$$

Lösung zu 1.3.2

Die Geradengleichung muss zunächst in Vektorschreibweise transformiert werden

$$(1 \quad 2) * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 1 = 0$$

und in die Hessesche Normalform gebracht werden

$$\frac{\boldsymbol{a^T x}}{\|\boldsymbol{a}\|} - \frac{\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|} = 0$$

$\boldsymbol{a^T} = (1 \quad 2)$

$b = -1$

Die Länge von $\boldsymbol{a}$ ist

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Für die Berechnung des Abstandes muss nun die Geradengleichung auf die Länge 1 normiert werden.

$$\frac{x_1}{\sqrt{5}} + \frac{2x_2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$$

Setzt man nun die Koordinaten des Punktes P ein, erhält man den Abstand zwischen Gerade G und Punkt P.

$$\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

Der Abstand ist positiv, daher liegt der Punkt auf der Seite der Geraden, in die der Orthogonalenvektor zeigt.

Hinweis: Die Umformung in die Vektorschreibweise habe ich nur der Vollständigkeit halber gemacht. Du kannst auch die Komponenten des Vektors $\boldsymbol{a}$ aus der Koordinatenformgleichung ablesen und diese direkt durch $\|\boldsymbol{a}\|$ teilen.

Lösung zu 1.3.3

Man kann die Gleichung auch schreiben als

$2x_1 + 4x_2 + x_3 - 2 = 0$

Durch Normierung auf die Länge 1 erhält man die Hessesche Normalform:

Länge des Vektors ***a:***

$\|a\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{21}$

Daraus folgt

$$\frac{2x_1 + 4x_2 + x_3 - 2}{\sqrt{21}} = 0$$

Den Abstand des Punktes P von der Hyperebene E erhält man durch einsetzen:

$$\frac{2 * 1 + 4 * 2 + 1 * 4 - 2}{\sqrt{21}} = \frac{12}{\sqrt{21}}$$

1.4. Matrizenrechnung

Zunächst einige wichtige Notationen:

- Eine Matrix besteht aus m Zeilen und n Spalten und wird geschrieben als:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} steht für das Element in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte und es gilt *i=1* bis *m* und *j=1* bis *n*. Es wird in der Indizierung also immer erst die Zeile und dann die Spalte des Elementes genannt.

- Eine Matrix besteht also aus m Zeilenvektoren bzw. n Spaltenvektoren. Man sagt auch: Die Matrix ist eine „m x n Matrix“(gesprochen „m Kreuz n“).

- Gilt für eine Matrix $m = n$ (Anzahl der Zeilen = Anzahl der Spalten), so nennt man sie eine **quadratische Matrix**.

- Die Elemente $a_{11}, a_{22}, a_{33} \ldots a_{mn}$ bilden die **Hauptdiagonale** der Matrix. Diese geht von oben links nach unten rechts. Es gibt auch noch die **Nebendiagonale**. Diese geht von unten links nach oben rechts.

- Besteht die Hauptdiagonale nur aus Einsen und alle anderen Elemente aus Nullen, so nennt man die Matrix eine **Einheitsmatrix**.

- Eine Matrix ist **symmetrisch**, wenn gilt: $a_{ij} = a_{ji}$. Jede Komponente oberhalb der Hauptdiagonalen nimmt also denselben Wert an wie das entsprechende Element unterhalb der Hauptdiagonalen. Würde man alle Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen an dieser spiegeln, so würde sich eine symmetrische Matrix nicht verändern.

- Das hochgestellte T steht auch hier für das Transponieren. Beim **Transponieren einer Matrix** werden Zeilen und Spalten vertauscht. Die erste Zeile wird zur ersten Spalte usw.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Manchmal findest du in Klausuraufgaben die Schreibweise einer Matrix in Form von Blockmatrizen:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

Beispiel:

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ kann in der Form $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}$ dargestellt werden. $\boldsymbol{A}_{11}$ kann dann beispielsweise für die 1 stehen, $\boldsymbol{A}_{12}$ für $(2 \quad 3)$, $\boldsymbol{A}_{21}$ für $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{A}_{22}$ für $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ stehen.

Matrizenaddition und -subtraktion

Ähnlich der Addition/Subtraktion von Vektoren werden auch bei der Addition/Subtraktion von Matrizen die einzelnen Komponenten addiert/subtrahiert.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 12 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 3+9 \\ 11+12 & 2+17 \end{pmatrix}$

Matrixmultiplikation:

Hier werden 4 Möglichkeiten unterschieden:

1) Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl (Skalar).

2) Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor.

3) Multiplikation einer Matrix mit einer anderen Matrix.

4) Matrixprodukt (äußeres Produkt) zweier Vektoren

Zu 1) Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl (Skalar)

Wie auch bei der Vektorrechnung wird jedes einzelne Element der Matrix mit diesem Skalar multipliziert.

Zu 2) Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor

Bei der Multiplikation ist die Reihenfolge der Faktoren wichtig. Steht der Vektor vor der Matrix, so muss er als Zeilenvektor geschrieben werden. Steht er hinter der Matrix, so muss er als Spaltenvektor geschrieben werden.

Das Produkt aus $Vektor * Matrix$ ist ein Vektor und die Elemente des neuen Vektors ergeben sich nach folgender Regel:

$$(b_1\ b_2\ b_3) * \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = (b_1a_{11} + b_2a_{21} + b_3a_{31} \qquad b_1a_{12} + b_2a_{22} + b_3a_{32})$$

Beachte: Das Ergebnis ist ein Zeilenvektor und die Anzahl der Komponenten entspricht der Spaltenzahl der Matrix (dem Spaltenrang).

Bei der Multiplikation wird also der Zeilenvektor mit jedem einzelnen Spaltenvektor der Matrix multipliziert und die einzelnen Produkte ergeben die Komponenten des neuen Vektors.

Beispiel:

$$(3 \quad 17 \quad 5) * \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (23 \quad 34 \quad 35)$$

Die 35 ergibt sich beispielsweise aus der Multiplikation von

$$(3 \quad 17 \quad 5) * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 + 17 + 15 = 35$$

Steht die Matrix bei der Multiplikation vor dem Vektor, so muss es sich um einen Spaltenvektor handeln. Das Ergebnis dieser Multiplikation ist ein Spaltenvektor und wird nach folgender Rechenregel ermittelt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 \\ a_{31}b_1 + a_{32}b_2 \end{pmatrix}$$

Beachte: das Ergebnis ist ein Spaltenvektor und die Anzahl der Komponenten entspricht der Anzahl an Zeilen der Matrix (dem Zeilenrang).

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Die 15 ergibt sich beispielsweise als Produkt der Vektoren

$$(3 \quad 6) * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 * 1 + 2 * 6$$

Zu 3) Multiplikation einer Matrix mit einer anderen Matrix

Hast du die Multiplikation zwischen einer Matrix und einem Vektor verstanden, so ist 3) nur eine sehr kleine Erweiterung:

Bei der Multiplikation von 2 Matrizen ist das Ergebnis eine Matrix. Diese hat so viele Zeilen wie die erste Matrix und so viele Spalten wie die zweite Matrix.

Der erste Zeilenvektor der Ergebnismatrix ergibt sich aus der Multiplikation des ersten Zeilenvektors der ersten Matrix mit der zweiten Matrix. Der zweite Zeilenvektor der Ergebnismatrix ergibt sich aus der Multiplikation des zweiten Zeilenvektors der ersten Matrix mit der zweiten Matrix usw.

Mathematisch schreibt man:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22+}a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

Merke: Zeile der ersten Matrix $*$ Spalte der zweiten Matrix. Dies gilt auch für die Multiplikation unter 2) zwischen einem Vektor und einer Matrix. Daher sind diese Multiplikationen auch nur möglich, wenn die Anzahl der Spalten der ersten Matrix der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix entspricht.

Eine a x n Matrix kann also nur mit einer n x b Matrix multipliziert werden. Die Ergebnismatrix besitzt dann immer die Form a x b.

Zu 4) Matrixprodukt (äußeres Produkt) zweier Vektoren

Multipliziert man einen Spaltenvektor mit einem Zeilenvektor, so gelten die Regeln für die Matrixmultiplikation unter 3), nur dass es sich bei Vektoren um n x 1, bzw. 1 x m Vektoren handelt.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} * (1 \quad 0 \quad 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \\ 5 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Achtung: Bei Matrixmultiplikationen unbedingt die Reihenfolge einhalten. Matrixmultiplikationen sind nicht kommutativ.

Übungsaufgaben zu 1.4

Aufgabe 1.4.1

Berechne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.4.2

Berechne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.4.3

Berechne

$$(1 \quad 0 \quad 2) * 2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.4.4

Berechne

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.4.5

Berechne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} * (1 \quad -1 \quad 2)$$

Lösungen zu 1.4

Lösung zu 1.4.1

Wir multiplizieren Zeilen mit Spalten:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 1 & 10\\14 & 4 & 25\\23 & 7 & 40\end{pmatrix}$$

Die 1 ergibt sich beispielsweise aus der Multiplikation aus

$$(1 \quad 2 \quad 3) * \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1 * 1 + 2 * 0 + 3 * 0 = 1$$

Die 4 ergibt sich aus

$$(4 \quad 5 \quad 6) * \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 4 * 1 + 5 * 0 + 6 * 0 = 4$$

Lösung zu 1.4.2

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\3 & 1 & 2\\4 & 2 & -1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\\8\end{pmatrix}$$

Die 5 ergibt sich beispielsweise aus:

$$3 * 1 + 1 * 2 + 2 * 0 = 5$$

Lösung zu 1.4.3

$$(1 \quad 0 \quad 2) * 2\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & -2\\0 & 1\end{pmatrix} = (4 \quad 2)$$

Die 4 ergibt sich beispielsweise aus: $1 * 4 + 0 * 2 + 4 * 0 = 4$

Lösung zu 1.4.4

Multiplikation nicht möglich, da Anzahl der Spalten der ersten Matrix nicht gleich Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix.

Lösung zu 1.4.5

$$\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} * (1 \quad -1 \quad 2) = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\2 & -2 & 4\\4 & -4 & 8\end{pmatrix}$$

1.5. Ökonomische Verwendung von Matrizen

Matrizen werden oft zur Darstellung von Input-Output-Beziehungen bei Produktionsprozessen genutzt. Werden aus 3 Rohstoffen 3 Güter hergestellt, so kann in einer Matrix dargestellt werden, wie viele Rohstoffe bei der Produktion der jeweiligen Güter verbraucht werden.

Beispiel:

Drei Rohstoffe R_1, R_2, R_3 werden zur Produktion von drei Gütern G_1, G_2, G_3 verbraucht. Die folgende Matrix gibt an, wie viele Rohstoffe für die jeweiligen Güter verbraucht werden:

$$\begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} G_1 & G_2 & G_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 7 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Zum Beispiel werden für die Herstellung eines Gutes G_3, 4 Einheiten R_1, 0 Einheiten R_2 und 3 Einheiten R_3 verbraucht.

Werden nun auch die Güter G_1, G_2, G_3 zur Herstellung von 2 Endprodukten P_1, P_2 verwendet, so kann man auch hierfür eine Matrix erstellen. Interessiert nun, wie viele Rohstoffe zur Herstellung von P_1 und P_2 verbraucht werden, so kann die Matrixmultiplikation genutzt werden. Achte darauf, dass du immer die Inputfaktoren als Zeilenvektoren schreibst und die Outputfaktoren als Spaltenvektoren.

Beispiel:

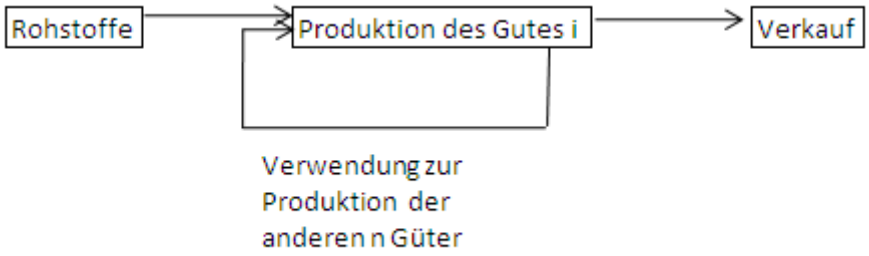
Aus 3 Rohstoffen R werden 3 Zwischengüter Z und aus diesen 2 Endprodukte E gefertigt:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} R_1 & \square & \square \\ R_2 & \square & \square \\ R_3 & \square & \square \end{pmatrix} \end{array} * \begin{array}{c} \begin{array}{cc} E_1 & E_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} Z_1 & \square & \square \\ Z_2 & \square & \square \\ Z_3 & \square & \square \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} E_1 & E_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} R_1 & \square & \square \\ R_2 & \square & \square \\ R_3 & \square & \square \end{pmatrix} \end{array}$$

Die Outputs stehen an den Spaltenvektoren und die Inputs an den Zeilenvektoren. Die letzte Matrix gibt an, wie viele Rohstoffe für die Produktion von E_1 und E_2 verbraucht werden.

Input-Output-Analysen

Gegeben sei folgendes Grundmodell:



$i = 1$ bis n.

Es werden also zur Herstellung von n Produkten Rohstoffe benötigt. Einige der Produkte gehen direkt in den Verkauf, andere gehen in die Produktion anderer Güter ein.

Um das Modell in Matrixschreibweise darzustellen werden folgende Vektoren definiert:

$\boldsymbol{q}$ als Spaltenvektor der Produktionsmengen der Produkte (Bruttobedarfsvektor).

y als Spaltenvektor der Verkaufsmengen (Nettobedarfsvektor).

P als Matrix der Produktionskoeffizienten. Diese gibt an, welche Menge des Produktes i für die Herstellung eines der anderen Produkte zur Verfügung stehen muss (Direktbedarfsmatrix).

Die Produktionsmenge eines Gutes geht teilweise in den Verkauf und teilweise in die Produktion anderer Güter. Mathematisch schreibt man:

$$q_i = y_i + \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq 1}}^{n} p_{ij} q_{ij}$$

Die Differenz aus Gesamtproduktion und Verkaufsmenge – also die Güter, die in die Produktion anderer Güter eingehen – nennt man Sekundärbedarfsvektor und schreibt mathematisch $\boldsymbol{q} - \boldsymbol{y}$.

Die obige Gleichung in Vektorschreibweise lautet:

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{P} * \boldsymbol{q}$$

Aufgelöst nach y:

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}) * \boldsymbol{q}$$

,wobei I für die Einheitsmatrix steht.

In diesem Modell findet der exogene Input an Rohstoffen keine Beachtung.

Beispiel: Gegeben sei der Produktionsvektor

$$\boldsymbol{q} = (50{,}80{,}120)^T$$

und die Matrix der Produktionskoeffizienten

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Es sollen die tatsächlichen Verkaufsmengen berechnet werden.

Antwort: Zunächst wird die Matrix $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}$ gebildet:

$$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}2 & 1 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Multipliziert mit **q** ergibt sich:

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}) * \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 42 \\ 10 \\ 72 \end{pmatrix}$$

Es kann auch vorkommen, dass y und P gegeben sind, und nach q gefragt ist. Dazu muss die Gleichung

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}) * \boldsymbol{q}$$

nach q aufgelöst werden. Dies geschieht, indem man „von links“ mit $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})^{-1}$ multipliziert.

$$\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})^{-1} * \boldsymbol{y}$$

Mit der Matrix $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})^{-1}$ kann man also aus dem Nettobedarf direkt den Bruttobedarf ausrechnen.

Beispiel: Gegeben sei der Verkaufsvektor $\boldsymbol{y} = (20{,}40{,}20)^T$ und die Gesamtbedarfsmatrix

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Berechne den Bruttobedarfsvektor.

Antwort: Zunächst berechnet man das Inverse zu der Matrix (Matrixinversion siehe Kapitel 2.2).

Das Inverse beträgt (siehe Aufgabe 2.2.2):

$$\begin{pmatrix} {}^{12}/_{7} & {}^{3}/_{7} & -1 \\ {}^{19}/_{7} & {}^{3}/_{7} & -2 \\ {}^{11}/_{7} & {}^{1}/_{7} & -1 \end{pmatrix}$$

Multipliziert mit y ergibt sich:

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 31{,}4 \\ 31{,}4 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Modell mit exogenem Input

Nun werden die Rohstoffinputs in das Modell einbezogen.

Dazu werden folgende Matrizen definiert:

v ist der Spaltenvektor der eingesetzten Rohstoffmengen (Rohstoffverbrauchsvektor).

R ist die Matrix der Rohstoffverbrauchskoeffizienten (Rohstoffverbrauchsmatrix). Diese gibt an wie viele und welche Rohstoffe für die Produktion der verschiedenen Güter benötigt werden.

Es gilt also:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{R} * \boldsymbol{q}$$

(Solltest du Probleme mit dem Verständnis der Matrixschreibweisen haben, stelle dir einfach den ein-Produkt-Fall mit nur einem Rohstoff vor. Das muss man nicht in Matrixform schreiben. Für $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{R} * \boldsymbol{q}$ bedeutet das beispielsweise: Es müssen $\boldsymbol{q} = 5$ Produkte produziert werden. Zur Produktion eines Produktes werden R$= 2$ Rohstoffe benötigt. Insgesamt werden also $\boldsymbol{v} = 5 * 2 = 10$ Rohstoffe benötigt.)

Für **q** kann man nun wieder $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})^{-1} * \boldsymbol{y}$ einsetzen und erhält:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{R} * (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})^{-1} * \boldsymbol{y}$$

Sollte nach y gefragt sein, muss die Gleichung nach y aufgelöst werden. Man erhält:

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{v}$$

Übungsaufgaben zu 1.5

Aufgabe 1.5.1

Aus den Rohstoffen R_1, R_2, R_3 werden die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 hergestellt. Aus den Zwischenprodukten werden die beiden Endprodukte P_1 und P_2 gefertigt. Für die jeweiligen Bedarfsmengen gilt:

Für Z_1 werden 2 R_1, 3 R_2 und 5 R_3 benötigt.

Für Z_2 werden 3 R_1, 1 R_2 und 2 R_3 benötigt.

Für P_1 werden 5 Z_1 und 7 Z_2 benötigt.

Für P_2 werden 2 Z_1 und 12 Z_2 benötigt.

Stelle die Rohstoffbedarfsmengen in Matrixform dar und ermittle durch Matrixmultiplikation die Rohstoffbedarfsmengen für die Endprodukte.

Aufgabe 1.5.2

Gegeben sei der Nettoverbrauchsvektor

$$\boldsymbol{y} = (20{,}10{,}20),$$

die Gesamtbedarfsmatrix

$$(I - P)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0{,}2 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \\ -0{,}1 & -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Sowie die Rohstoffverbrauchsmatrix

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Berechne den Rohstoffverbrauchsvektor.

Lösungen zu 1.5

Lösung zu 1.5.1

Rohstoffbedarfsmengen für die Zwischenprodukte:

$$\begin{pmatrix} & Z_1 & Z_2 \\ R_1 & 2 & 3 \\ R_2 & 3 & 1 \\ R_3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Zwischenprodukt-Bedarfsmengen für die Endprodukte:

$$\begin{pmatrix} & P_1 & P_2 \\ Z_1 & 5 & 2 \\ Z_2 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

Die Rohstoffbedarfsmengen der Endprodukte ermittelt man durch Matrixmultiplikation.

$$\begin{pmatrix} & Z_1 & Z_2 \\ R_1 & 2 & 3 \\ R_2 & 3 & 1 \\ R_3 & 5 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} & P_1 & P_2 \\ Z_1 & 5 & 2 \\ Z_2 & 7 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & P_1 & P_2 \\ R_1 & 31 & 40 \\ R_2 & 22 & 18 \\ R_3 & 39 & 34 \end{pmatrix}$$

Weitere Fragen Könnten sein: Gib die Rohstoffbedarfsmengen des Produktes P_2 an $\left(\text{Antwort: } \begin{pmatrix} 40 \\ 18 \\ 34 \end{pmatrix}\right)$ oder den Bedarf an R_2 für ein Endprodukt P_1 (Antwort:22).

Lösung zu 1.5.2

Der Vektor **v** ergibt sich nach der Formel:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{R} * (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})^{-1} * \boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{R} * (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0.8 & -0{,}4 \\ 1 & 0 & -0{,}2 \\ -0.3 & 0.1 & 1.5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{R} * (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})^{-1} * \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 40 \\ 16 \\ 25 \end{pmatrix}$$

1.6. Der Rang einer Matrix

Der Rang $(Rg(A))$ einer Matrix gibt an, wie viele linear unabhängige Vektoren sie besitzt. Hierzu können die Spaltenvektoren und auch die Zeilenvektoren überprüft werden. Die Anzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren entspricht nämlich immer auch der Anzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren. Eine Matrix hat vollen Rang, wenn gilt $Rg(A) = m = n$.

Es können also nur quadratische Matrizen vollen Rang haben!

Nun ein paar wichtige Eigenschaften:

- Multipliziert man eine Spalte oder Zeile mit einer Zahl, so ändert sich der Rang nicht.

- Addiert (subtrahiert) man zu (von) einer Zeile (Spalte) das Vielfache einer anderen Zeile (Spalte), so ändert sich der Rang nicht.

- Vertauscht man Zeilen (Spalten), so ändert sich der Rang nicht.

- Der minimale Rang einer Matrix ist 1, der maximale Rang ist das Minimum aus m und n.

Verfahren zur Ermittlung des Ranges einer Matrix

Um den Rang einer Matrix zu bestimmen, benutzt man die ersten 3 Eigenschaften der Matrix (siehe oben: Multiplikation mit Skalar, Vertauschen von Spalten oder Zeilen, Addition/Subtraktion von Zeilen).

Mit Hilfe dieser Umformungen versucht man nun eine Zeile oder Spalte komplett aus Nullen darzustellen. Eine 3 x 3 Matrix vom Rang 2 enthält einen Nullvektor.

Eine 4 x 4 Matrix vom Rang 2 enthält zwei Nullvektoren.

Eine 6 x 6 Matrix vom Rang 3 enthält drei Nullvektoren.

Eine Matrix mit vollem Rang kann nicht mit einem Nullvektor dargestellt werden.

Zum Verfahren:

1) Ist das Element $a_{11} = 0$, so vertauscht man die Zeilen oder Spalten, sodass dieses Element ungleich Null wird.

2) Die erste Zeile wird durch a_{11} geteilt. Dieses Element ist nun gleich 1.

3) Durch Subtraktion des Vielfachen der ersten Zeile von den anderen Zeilen werden in der ersten Spalte unter a_{11} Nullen produziert. Dies wird erreicht, indem man z.B. das a_{21}-fache der ersten Zeile von der zweiten abzieht (und das a_{31}-fache von der dritten, und das a_{i1}-fache von der i-ten Zeile).

4) Nach diesen Rechenoperationen ist der erste Spaltenvektor der Einheitsvektor. Die erste Zeile wird von jetzt ab nicht mehr verwendet. Das Verfahren beginnt wieder bei Punkt 1), nur dass nun das Element a_{22} auf 1 gebracht wird und die Elemente darunter auf 0. Es kann auch nach Punkt 3) die erste Zeile und die erste Spalte gestrichen werden und mit der neuen verkleinerten Matrix wieder neu bei 1) begonnen werden.

5) So werden unterhalb der Hauptdiagonale Nullen erzeugt. Der Rang der Matrix entspricht der Zeilenzahl, die nicht ausschließlich aus Nullen besteht.

Beispiel: Bestimme den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Das Element a_{11}ist ungleich Null, daher

2) teilen wir durch 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 4 & 9 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3) Um unter dem Element a_{11} Nullen zu erzeugen, wird das 4-fache ($a_{21} = 4$) der ersten Zeile von der zweiten abgezogen und das 1-fache ($a_{31} = 1$) der ersten Zeile von der dritten Zeile abgezogen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Wir beginnen wieder mit 1), versuchen aber nun an der Stelle a_{22} eine Eins zu erzeugen.

4.1) a_{22} ist ungleich Null und daher

4.2) teilen wird Zeile 2 durch 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

4.3) Um unter a_{22} eine Null zu erzeugen, wird das (-1,5)-fache der zweiten Zeile von der dritten subtrahiert.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5) Da keine Zeilenvektoren komplett aus Nullen bestehen, hat die Matrix vollen Rang!

Tipp: Eine einfache Methode, ob eine Matrix vollen Rang hat, ist die Ermittlung der Determinante der Matrix. Ist diese ungleich Null, so hat die Matrix vollen Rang. Ist sie gleich Null, so hat sie keinen vollen Rang, der genaue Rang läßt sich aber mit der Determinante nicht bestimmen.

Übungsaufgaben zu 1.6

Aufgabe 1.6.1

Berechne den Rang der folgenden Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.6.2

Berechne den Rang folgender Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

Lösungen zu 1.6

Lösung zu 1.6.1

Wir erzeugen zunächst im Element a_{11} die 1, indem wir die Zeile durch 2 teilen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun ziehen wir das 4 fache der ersten Zeile von der zweiten ab, um im Element a_{21} eine Null zu erzeugen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie man sieht, sind die zweite und die dritte Zeile linear abhängig. Die erste und die zweite Zeile sind aber linear unabhängig (es kann keine weitere Zeile mit Nullen erzeugt werden). Der Rang der Matrix ist daher 2.

Tipp: Da es sich um eine 3 x 3 Matrix handelt, kann man wieder versuchen, den Rang über die Determinante (siehe Anhang) zu bestimmen. Da in diesem Fall die Determinante Null ist, können wir nur sagen, dass der Rang kleiner 3 ist. Da aber beim Rang von 1 alle 3 Vektoren jeweils einzeln linear abhängig sind (also jeder Vektor durch ein Vielfaches jedes der beiden anderen Vektoren dargestellt werden kann), kann man schnell sehen, dass der Rang 2 ist. Bisher gab es in keiner Klausur eine 3 x 3 Matrix vom Rang 1, da man diese sofort erkennen könnte.

Lösung zu 1.6.2

Da das Element a_{11}schon gleich 1 ist, erzeugen wir darunter Nullen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix hat den Rang 1!

2.1. Lineare Gleichungssysteme

Als lineares Gleichungssystem (LGS) bezeichnet man eine Gruppe von Gleichungen der Ordnung 1 (also x^1 und nicht x^2, x^3 oder $\sqrt{\mathrm{x}}$ usw.)

Das Gleichungssystem

$$2x_1 + 3x_2 = 4$$

$$1x_1 + 4x_2 = 2$$

Ist also ein LGS und kann in Matrixschreibweise auch so geschrieben werden:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Wobei $\boldsymbol{A}$ die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

x der Vektor

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

und **b** der Vektor

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ist.

Man kann das LGS auch in Vektorform schreiben:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Ist $\boldsymbol{b} = 0$, so nennt man das LGS homogen, ansonsten inhomogen.

Lösbarkeit von LGS:

Für LGS kann es eindeutige, mehrere oder keine Lösung geben. Dies hängt davon ab, wie die Vektoren zueinander liegen. Vektoren können sich schneiden, aufeinander liegen oder parallel zueinander sein. Im R^2 is das anschaulich gut darstellbar, in höheren Dimensionen nicht mehr.

Ob ein Gleichungssystem lösbar ist, kann über den Rang bestimmt werden. Dabei wird der Rang der Matrix $\boldsymbol{A}$ mit dem Rang der um den Vektor $\boldsymbol{b}$ erweiterten Matrix $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ verglichen.

- Steigt der Rang der Matrix, wenn man den Vektor b anfügt, so ist das LGS nicht lösbar. (Verstehst du warum? Steigt der Rang der Matrix durch Erweiterung mit **b,** so bedeutet das, dass **b** linear unabhängig von der Matrix ist, also nicht durch eine Linearkombination der Vektoren darstellbar.)

- Gilt $Rg(\boldsymbol{A}) = Rg(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) =$ maximal, dann ist das LGS eindeutig lösbar.

- Gilt $Rg(\boldsymbol{A}) = Rg(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) < n$, so ist das LGS nicht eindeutig lösbar, aber es gibt mehrere Lösungen. Das Gleichungssystem enthält linear abhängige Vektoren und ist somit unterbestimmt.

Lösen eines LGS mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren

Die Lösung eines LGS wird mit dem Gauß'schen Eliminierungsverfahren ermittelt.

Dazu benötigst du wieder die bekannten Rechenregeln aus der Rangbestimmung einer Matrix. Auch die Verfahren sind sich sehr ähnlich.

Zum Verfahren:

Zunächst wird die Matrix um den Vektor $\boldsymbol{b}$„erweitert"- der Vektor $\boldsymbol{b}$ wird rechts daneben geschrieben. Dann wird, genau wie bei Verfahren zur Rangermittlung auf der Hauptdiagonale, jeweils die 1 erzeugt und darunter Nullen. Zusätzlich werden alle Rechenschritte auch auf den Vektor **b** angewendet. Im Ergebnis können die Lösungen direkt abgelesen werden.

Dazu ein **Beispiel**:

Die Lösung des folgenden LGS wird wie folgt ermittelt:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Zunächst wird die Matrix **A** um **b** erweitert:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right)$$

Das Element a_{11}ist schon $= 1$ und wir erzeigen direkt die Nullen unter diesem Element. Die Rechenschritte sind:

- Gleichung II minus $2 *$ Gleichung I

- Gleichung III minus Gleichung I

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{array}\right)$$

Um an der Stelle a_{22} eine 1 zu erzeugen, wird Gleichung II durch -3 geteilt. Um darunter Nullen zu erzeugen, wird das 7-fache der neuen Gleichung II zu der Gleichung III hinzuaddiert.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & -2/3 \end{array}\right)$$

Nun muss noch an der Stelle a_{33} eine 1 erzeugt werden: Gleichung III mit -3 multiplizieren.

Aus der Ergebnismatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

können die Lösungen abgelesen werden:

In der letzten Zeile steht:

$$0x_1 + 0x_2 + x_3 = 2$$

Woraus $x_3 = 2$ folgt.

In der zweiten Zeile steht:

$$0x_1 + 1x_2 + \frac{2}{3}x_3 = -2/3$$

Hier wird $x_3 = 2$ eingesetzt, um $x_2 = -2$ zu erhalten

Genauso werden x_2 und x_3 in Gleichung I eingesetzt, um $x_1 = 3$ zu erhalten.

Tipp: Da beim Gauß'schen Eliminationsverfahren sehr viele Möglichkeiten für Rechenfehler bestehen, solltest du 1) unbedingt deine Ergebnisse in die Ausgangsgleichung einsetzen und so prüfen ob du richtig gerechnet hast und 2) die Rechenschritte möglichst ausführlich hinschreiben- also nachdem du eine 1 erzeugt hast, die gesamte Matrix hinschreiben und erst dann die Nullen erzeugen.

Übrigens: Was im Fernuni Skript unter „Pivotisieren" und „Kreisregel" beschrieben ist, entspricht den Rechenschritten des Gauß'schen Eliminationsverfahrens.

Mengentheoretischer Durchschnitt: In den letzten Jahren war regelmäßig die Aufgabe, den mengentheoretischen Durchschnitt eines Gleichungssystems zu ermitteln.

Dazu ermittelt man den Rang der erweiterten Matrix. Hat sie den Rang von $\boldsymbol{A}$, so ist das Gleichungssystem lösbar. Hat A vollen Rang, so ist der mengentheoretische Durchschnitt ein Punkt. Für jede Variable muss die erweiterte Matrix einen Rang haben. Für jeden Rang, der fehlt, steigt der mengentheoretische Durchschnitt um eine Dimension (Punkt->Gerade->Ebene usw.).

In anderen Worten ausgedrückt: Für jede Variable muss eine(linear unabhängige) Gleichung existieren, um alle Variablen zu bestimmen. Für jede Gleichung, die fehlt, kann eine Variable nicht bestimmt werden und die Dimension des mengentheoretischen Durchschnitts steigt.

Beispiel: Bestimme den mengentheoretischen Durchschnitt des folgenden LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ 14 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Antwort:

Man ermittelt zunächst den Rang der 3 x 3 Matrix und der erweiterten 4 x 3 Matrix.

Dazu erzeugt man Einsen in der Hauptdiagonalen und Nullen darunter:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -3/2 & 1 & 7/2 \\ 0 & 5 & -3 & -7 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2/3 & -7/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 14/3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2/3 & -7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

Die Matrizen haben beide den Rang 3 (Die 3x3 Matrix hat vollen Rang). Der mengentheoretische Durchschnitt ist daher ein Punkt.

Übungsaufgaben zu 2.1

Aufgabe 2.1.1

Bestimme den mengentheoretischen Durchschnitt (Punkt, Gerade oder leere Menge) des Gleichungssystems

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

für $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2.1.2

Bestimme, ob der mengentheoretische Durchschnitt des folgenden GLS ein Punkt, eine Gerade oder die leere Menge ist.

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

für $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2.1.3

Bestimme die Lösung des folgenden LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Lösungen zu 2.1

Lösung zu 2.1.1

Zunächst wird der Rang von ***A*** ermittelt. Dies kannst du mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren machen oder über die Berechnung der Determinante (siehe Anhang).

Ich werde der Vollständigkeit halber das Gauß'sche Eliminationsverfahren verwenden.

Durch Erzeugung von 1en in der Hauptdiagonalen und Nullen darunter ergeben sich folgende Matrizen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 2/5 & 18/5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

Die erweiterte Matrix hat den Rang 3, da die letzte Spalte durch eine Linearkombination der 3 Spaltenvektoren (nämlich $x_1 = 9, x_2 = -7, x_3 = 5$) reproduziert werden kann (also linear abhängig ist).

Der mengentheoretische Durchschnitt ist also ein Punkt.

Lösung zu 2.1.2

Bestimmung des Ranges von ***A*** und der um ***b*** erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & -5 & -10 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

Erzeugung von Einsen in der Hauptdiagonalen und Nullen darunter:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 18/5 \end{array}\right)$$

A hat den Rang 2 und die um ***b*** erweiterte Matrix hat Rang 3. Daher ist das LGS nicht lösbar. Der mengentheoretische Durchschnitt ist die leere Menge.

Lösung 2.1.3

Wir ermitteln zunächst den Rang der Matrix. Dadurch können wir einerseits bestimmen, ob und wie viele Lösungen das LGS hat und außerdem kann man aus der Matrix mit Einsen in der Hauptdiagonale und Nullen darunter direkt die Lösung ablesen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Aus dieser Matrix kann man die Lösung direkt ablesen, indem man die Lösung der zweiten Gleichung in die dritte einsetzt und die Lösung der zweiten und dritten in die erste (Die Standardform mit Einsen in der Hauptdiagonale könnten wir durch Vertauschen der zweiten und dritten Zeile erhalten- dies ist aber nicht notwendig.)

Die Lösung lautet:

$$a = 0$$

$$b = -2$$

$$c = -1$$

2.2. Invertieren einer Matrix

Für das Inverse einer Matrix muss gelten:

$$\boldsymbol{A} * \boldsymbol{A}^{-1} = \mathbf{1}$$

wobei die fett gedruckte **1** für die Einheitsmatrix steht.

Eine Matrix ist nur invertierbar, wenn sie:

- quadratisch ist und

- vollen Rang hat (regulär ist).

Grundsätzlich lässt sich eine Matrix invertieren, indem man folgendes LGS löst:

$$\boldsymbol{A} * \boldsymbol{A}^{-1} = \mathbf{1}$$

Da $\boldsymbol{A}^{-1}$unbekannt ist, schreiben wir

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dies sind drei inhomogene LGS:

$$a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + a_{13}x_{31} = 1$$

$$a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + a_{23}x_{31} = 0$$

$$a_{31}x_{11} + a_{32}x_{21} + a_{33}x_{31} = 0$$

$$a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + a_{13}x_{32} = 0$$

$$a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} + a_{23}x_{32} = 1$$

$$a_{31}x_{12} + a_{32}x_{22} + a_{33}x_{32} = 0$$

$$a_{11}x_{13} + a_{12}x_{23} + a_{13}x_{33} = 0$$

$$a_{21}x_{13} + a_{22}x_{23} + a_{23}x_{33} = 0$$

$$a_{31}x_{13} + a_{32}x_{23} + a_{33}x_{33} = 1$$

Durch Lösen dieser LGS erhält man das Inverse zur Matrix ***A***.

Das Inverse einer Matrix kann mit dem **Gauß'schen Eliminierungsverfahren** ermittelt werden.

Dazu benötigst du wieder die bekannten Rechenregeln aus der Rangbestimmung einer Matrix. Auch die Verfahren sind sich sehr ähnlich.

Zum Verfahren:

Zunächst wird die zu invertierende Matrix um die Einheitsmatrix „erweitert" - die Einheitsmatrix wird rechts daneben geschrieben. Dann wird, genau wie bei Verfahren zur Rangermittlung, auf der Hauptdiagonale jeweils die 1 erzeugt und darunter Nullen. Zusätzlich werden aber auch darüber Nullen erzeugt und alle Rechenoperationen werden auch auf die Einheitsmatrix angewendet. Im Ergebnis wird also aus der Matrix eine Einheitsmatrix und aus der Einheitsmatrix wird eine neue Matrix - nämlich die Inverse zu der Ausgangsmatrix.

Beispiel: Invertiere die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Zunächst wird die Matrix um die Einheitsmatrix erweitert:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Das Element a der Position a_{11} ist schon 1, daher wird sofort darunter die Null erzeugt, indem das 4-fache der ersten Zeile von der zweiten Zeile abgezogen wird.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Um an der Stelle a_{22} eine Eins zu erzeugen, wird die zweite Zeile durch -2 geteilt.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1/2 \end{array}\right)$$

Um über a_{22} eine Null zu erzeugen, wird das 2-fache der zweiten Zeile von der ersten Zeile abgezogen.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1/2 \end{array}\right)$$

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Ist das Inverse zur Matrix A.

Rechenregeln für Matrixinverse:

Es gilt:

$$\boldsymbol{A}^{-1} * \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} * \boldsymbol{A}^{-1}$$

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1} * \boldsymbol{A}^{-1}$$

Übungsaufgaben zu 2.2

Aufgabe 2.2.1

Zu welcher der folgenden Matrizen existiert das Inverse?

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.2.2

Berechne das Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.2.3

Berechne das Inverse zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.2.4

Berechne das Inverse zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.2.5

Berechne das Inverse zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 7 & -2 & 5 \\ 11 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

Lösungen zu 2.2

Lösung zu 2.2.1

Eine Matrix ist invertierbar, wenn sie vollen Rang hat („regulär“ ist) und quadratisch.

A ist invertierbar, da quadratisch und regulär.

B ist nicht invertierbar, da der erste und der dritte Zeilenvektor offenbar linear abhängig sind->kein voller Rang.

C ist nicht invertierbar, da nicht quadratisch.

Lösung zu 2.2.2

Erst wird die Matrix um die Einheitsmatrix erweitert

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Zunächst werden an der Stelle a_{11}eine Eins und in der restlichen Spalte Nullen erzeugt. Dazu wird von der zweiten Zeile das 3-fache der ersten und von der dritten das doppelte der ersten abgezogen.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -14 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Nach demselben Verfahren werden nun Einsen auf der Hauptdiagonale und ansonsten Nullen erzeugt.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1/7 & 2/7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3/7 & 1/7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -11/7 & -1/7 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 12/7 & 3/7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 19/7 & 3/7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/7 & 1/7 & -1 \end{array}\right)$$

Die Inverse der Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 12/7 & 3/7 & -1 \\ 19/7 & 3/7 & -2 \\ 11/7 & 1/7 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung zu 2.2.3

Erweitern um den Einheitsvektor

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Erzeugen von Einsen in der Hauptdiagonale und ansonsten Nullen

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -10 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/10 & 2/10 \\ 0 & 1 & 3/10 & -1/10 \end{array}\right)$$

Lösung zu 2.2.4

Erweiterung um die Einheitsmatrix:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 6 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Erzeugen von Einsen in der Hauptdiagonale und ansonsten Nullen

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & {}^{6}/_{7} & {}^{1}/_{7} & 0 \\ 0 & {}^{-1}/_{7} & {}^{-6}/_{7} & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & {}^{6}/_{7} & {}^{1}/_{7} & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -7 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & -7 \end{array}\right)$$

Lösung zu 2.2.5

Erweiterung um die Einheitsmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 11 & -3 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Erzeugen von Einsen in der Hauptdiagonale und ansonsten Nullen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & {}^{-1}/_{3} & {}^{2}/_{3} & {}^{-1}/_{3} & 0 & 0 \\ 0 & {}^{1}/_{3} & {}^{1}/_{3} & {}^{7}/_{3} & 1 & 0 \\ 0 & {}^{2}/_{3} & {}^{-1}/_{3} & {}^{11}/_{3} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

2.3. Lineare Planungsrechnung

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der linearen Optimierung. Bei der linearen Optimierung wird eine Zielfunktion unter Einhaltung einer oder mehrerer Nebenbedingungen optimiert. Mathematisch wird also eine Funktion $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ gegeben und zu den x_i werden Nebenbedingungen aufgestellt. Da es sich um lineare Optimierung handelt, ist $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine Funktion erster Ordnung.

Beispiel für ein lineares Optimierungsproblem:

Ein Unternehmen bietet zwei verschiedene Produkte mit folgenden Kennzahlen an.

	Produkt 1	Produkt 2
Erlös pro Stück	8	22
Gesamtkosten pro Stück	3	8
Arbeitseinsatz in h	2	4
Kapitaleinsatz in €	4	1

Die Gesamtkapazitäten für Arbeit und Kapital sind folgendermaßen beschränkt:

- Arbeit max. 7.000h

- Kapital max. 6.000€

Ziel der linearen Optimierung ist es nun, den Gewinn zu maximieren und dabei die Faktorbeschränkungen einzuhalten.

Die Zielfunktion ist $max\ z\ =\ 5x_1 + 14x_2$

(5 und 14 sind der Gewinn, der pro verkauftem Produkt 1 bzw. Produkt 2 anfällt)

Die Nebenbedingungen sind:

$$2x_1 + 4x_2 \leq 7.000$$

(Beschränkung für den Arbeitseinsatz)

und

$$4x_1 + x_2 \leq 6.000$$

(Beschränkung für den Kapitaleinsatz)

Außerdem wird gefordert, dass der Absatz nicht negativ werden kann:

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Um die ≤ Bedingungen in = Bedingungen zu überführen, werden nun sogenannte Schlupfvariablen eingeführt.

Aus

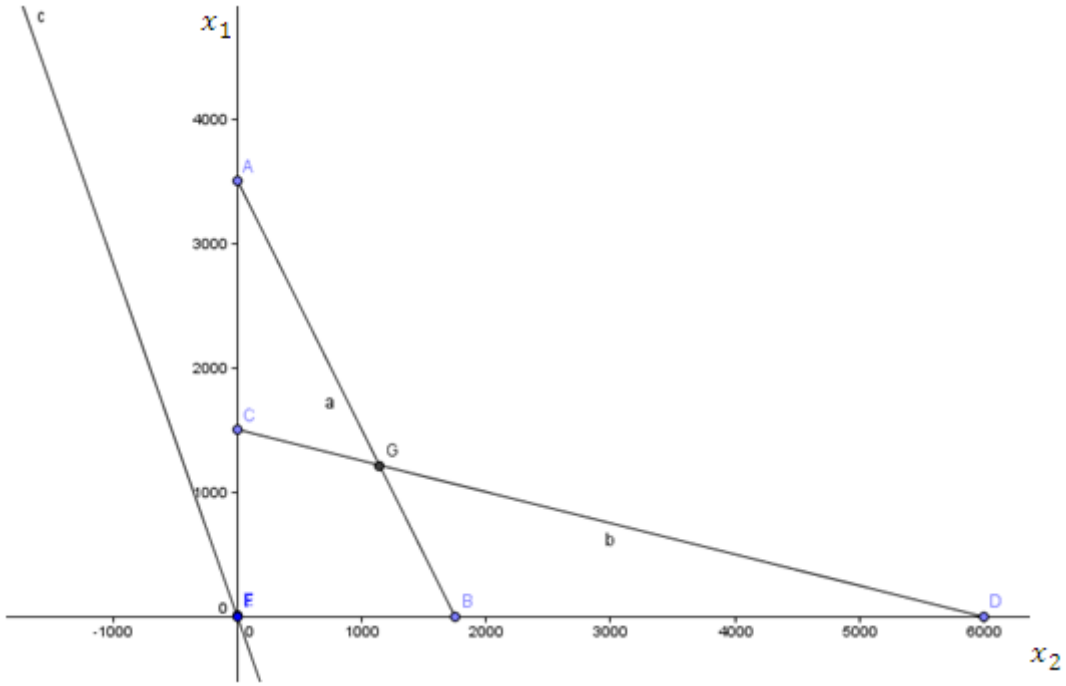
$$ax_1 + bx_2 \leq c$$

wird so

$ax_1 + bx_2 + s_1 = c$

Grafische Lösung eines linearen Optimierungsproblems (LOP)

Für 2 unabhängige Variablen x_1 und x_2 lassen sich Zielfunktion und Nebenbedingungen einfach zeichnen (Gleichungen nach x_1 umstellen):



Die erste Restriktion ist die Strecke a, die zweite Restriktion ist die Strecke b und die Gerade durch den Nullpunkt ist die Zielfunktion. Diese gilt es soweit wie möglich nach oben/rechts zu verschieben. Der Definitionsbereich wird durch die Punkte 0,B,G,C begrenzt. Es ist zu erkennen, dass die Zielfunktion im Punkt B maximal wird.

Achtung: Bei Minimierungsproblemen muss die Gerade der Zielfunktion Richtung Nullpunkt verschoben werden.

Lösen eines LOP mit dem Simplex-Algorithmus

Der sogenannte Simplex - Algorithmus löst das LOP in Tabellenform. Wie ein LOP in Tabellenform überführt und gelöst wird, versteht man am besten durch ein **Beispiel**:

Folgendes LOP soll mit dem Simplex Algorithmus gelöst werden:

$$\max x_0 = x_1 + 2x_2$$

Unter den Nebenbedingungen (u.d.N.)

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 \leq 6$$

$$x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Zunächst muss für jede ≤ Gleichung eine Schlupfvariable eingeführt werden. Wir nennen diese 3 Variablen x_3, x_4, x_5.

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + x_4 = 6$$

$$x_2 + x_5 = 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Das Simplex Tableau hat nun folgendes Schema:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	−1	−2	0	0	0	0
0	−1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	6
0	0	1	0	0	1	5

Zur Notation: Wie du siehst, gibt es in dem Tableau 4 Einheitsvektoren. Die zugehörigen Variablen nennt man Basisvariablen und sagt auch, sie sind „in der Basis“. In der Ausgangslösung ist der Zielfunktionswert Null und die beiden Schlupfvariablen sind in der Basis. Die Nichtbasisvariablen x_1, x_2 sind damit minimal, woraus auch der minimale Zielfunktionswert resultiert. Aus dem Tableau kann direkt die Basislösung abgelesen werden. Alle Nichtbasisvariablen sind 0 und die Werte der Basisvariablen können direkt auf der rechten Seite abgelesen werden (x_5 ist 5, x_4 ist 6, der Zielfunktionswert x_0 ist 0 und x_3 ist 1.)

In die erste Zeile (Zielfunktionszeile) wird immer die 1 für x_0 eingetragen und die Koeffizienten aus der Zielfunktion werden mit negativen Werten in die erste Zeile eingetragen. Alle anderen Koeffizienten werden direkt in das Tableau übernommen.

Ist das Ausgangstableau aufgestellt, so kann der Simplex-Algorithmus starten:

1. Schritt: Wähle als Pivotspalte die Spalte mit dem größten negativen Wert in der Zielfunktionszeile. Sind alle Werte positiv, so ist die optimale Lösung gefunden.

2. Schritt: Ermittle die Quotienten aus den Werten der rechten Seite(b) und den entsprechenden Elementen der Pivotspalte. Wähle das Element als Pivotelement, für das der Quotient am kleinsten, aber positiv ist.

3. Schritt: Erzeuge an der Stelle des Pivotelementes eine 1 und darüber und darunter Nullen. Hierbei gelten alle Rechenregeln, die du aus dem Gauß'schen Eliminationsverfahren kennst. Weiter bei 1)

Beispiel:

1. Schritt: Als größtes negatives Element der Zielfunktionszeile identifizieren wir -2. Die Spalte x_2 wird Pivotspalte.

2. Schritt: Die Quotienten aus der rechten Seite(b) und den entsprechenden Elementen der Pivotspalte betragen: 5/1, 6/0, 1/1. Das Minimum ist 1.Damit wird die 1 in der Spalte x_2 und der dritten Zeile zum Pivotelement.

3. Schritt: Wie aus dem Gauß'schen Eliminationsverfahren bekannt, erzeugen wir nun die 1 an der Position des Pivotelementes (ist bereits 1) und ansonsten Nullen in der Pivotspalte. Wir erhalten nach einem Simplex Schritt das Tableau:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	−3	0	2	0	0	2
0	−1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	6
0	1	0	−1	0	1	4

Durch den ersten Simplex Schritt ist der Zielfunktionswert von 0 auf 2 angestiegen. Da aber in der Zielfunktionszeile noch ein negativer Wert steht, sind wir nicht fertig und führen einen weiteren Simplex Schritt durch.

1. Schritt: Als größtes negatives Element wird -3 identifiziert und x_1 wird zur Pivotspalte.

2. Schritt: Die Quotienten aus der rechten Seite (b) und den entsprechenden Elementen der Pivotspalte betragen: 4/1, 6/1, 1/-1. Der kleinste positive Quotient ist 4 und daher wird die 1, also das letzte Elemente der Pivotspalte, zum Pivotelement.

3. Schritt: Wir erzeugen die 1 an der Stelle des Pivotelementes (ist bereits 1) und ansonsten Nullen in der Pivotspalte. Wir erhalten nach einem Simplex Schritt das Tableau:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	0	0	−1	0	3	14
0	0	1	0	0	1	5
0	0	0	1	1	−1	2
0	1	0	−1	0	1	4

Da in der Zielfunktionszeile noch immer ein negatives Element steht, führen wir noch einen Simplex Schritt durch und erhalten

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	0	0	0	1	2	16
0	0	1	0	0	1	5
0	0	0	1	1	−1	2
0	1	0	0	1	0	6

Aus diesem Tableau lassen sich die Lösungen ablesen. Die zum Einheitsvektor gehörenden Variablen sind in der Basis. Die Lösung lautet: $x_1 = 6$, $x_2 = 5$, $x_3 = 2$, $x_0 = 16$

Übungsaufgaben zu 2.3

Aufgabe 2.3.1

Zur Produktion der Güter x_1 und x_2 werden drei Rohstoffe benötigt. Der Bedarf wird durch folgende Rohstoffbedarfsmatrix angegeben:

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Die maximal zur Verfügung stehenden Rohstoffmengen sind:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Das Gut x_1 und x_2 werden jeweils zu 1 Euro pro Stück verkauft.

Stelle das Problem grafisch dar.

Aufgabe 2.3.2

Löse das folgende lineare Problem grafisch und mit dem Simplex Algorithmus:

Max $x_0 = x_1 + 2x_2$

u.d.N.

$$-3x_1 + 6x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Lösungen zu 2.3

Lösung zu 2.3.1

Die Zielfunktion ist natürlich, den Gewinn zu maximieren.

$$\max z = 1x_1 + 1x_2$$

Aus der ***R*** und ***v*** ergeben sich die Nebenbedingungen:

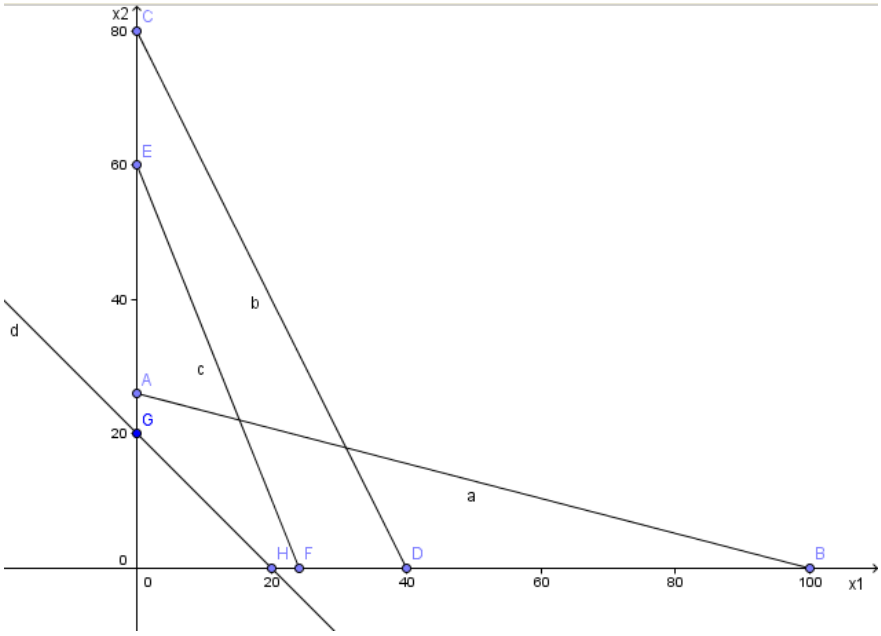
$$x_1 + 4x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + 1x_2 \leq 80$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 120$$

Außerdem müssen x_1 und x_2 ≥ sein.

Grafisch erhält man:



Das Optimum ist im Schnittpunkt der Strecken a und c erfüllt.

Die Strecke b ergibt sich beispielsweise aus

$$2x_1 + 1x_2 \leq 80$$

Für $x_1 = 0$ erhält man $x_2 = 80$ und für $x_2 = 0$ erhält man $x_1 = 40$. Da es sich um lineare Gleichungen handelt, werden die Punkte mit einer Geraden verbunden. Die Zielfunktion ist die

Gerade d und muss nach rechts oben verschoben werden, bis eine der Nebenbedingungen erreicht wird. Alle Nebenbedingungen sind $\leq$ Bedingungen, daher liegt der zulässige Bereich links unter den Nebenbedingungen.

Lösung zu 2.3.2

Für die beiden $\leq$ Bedingungen müssen 2 Schlupfvariablen x_3, x_4 eingeführt werden. Das Simplex Tableau hat dann die Form:

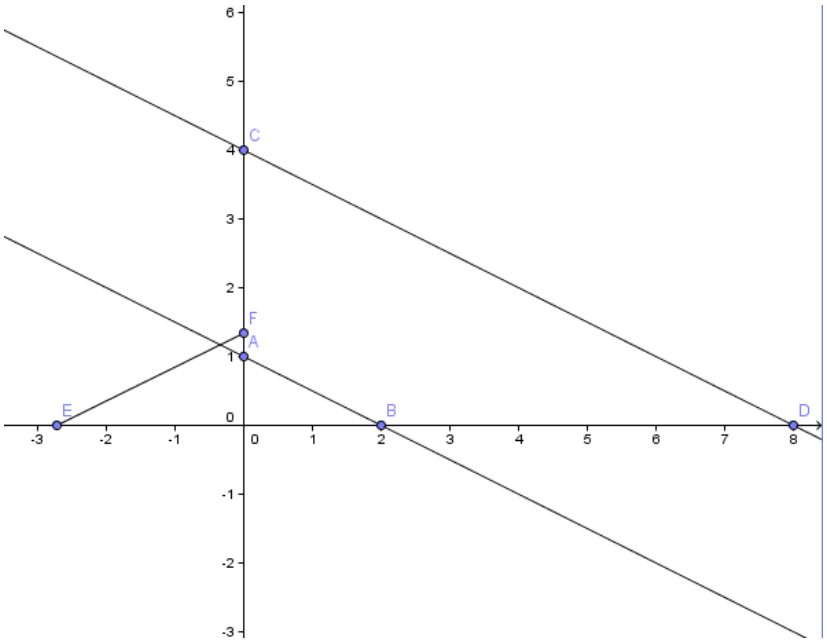
x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	-1	-2	0	0	0
0	-3	6	1	0	8
0	1	2	0	1	8

Nach obiger Regel identifizieren wir die -2 als größten negativen Wert der Zielfunktionszeile. Der niedrigste positive Quotient aus ***b*** und den Werten der Pivotspalte ist 8/6 und damit wird die 6 zum Pivotelement und kommt in die Basis, indem in ihrer Spalte Nullen erzeugt werden.

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	-2	0	$1/3$	0	$8/3$
0	$-1/2$	1	$1/6$	0	$8/6$
0	2	0	$-1/3$	1	$16/3$

Mit dem nächsten Simplex Schritt würde x1 in die Basis aufgenommen werden. Man sieht aber schnell, dass jeder Punkt auf der Strecke von C nach D die Zielfunktion maximiert (da Zielfunktion und Nebenbedingung parallel sind) und kann hier abrechen.

Grafische Lösung:



Die erste Nebenbedingung (Strecke E-F)hat keine Relevanz. Die Zielfunktionsgerade(A-B) nimmt bei $x_1 = 8$ oder $x_2 = 4$ (oder allen Punkten von C-D)ihren maximalen Wert von 8 an.

3.0 Finanzmathematische Grundlagen

Finanzmathematische Grundlagen werden auch in Investition und Finanzierung sowie in Einführung Wirtschaftswissenschaft behandelt.

Exkurz Finanzmathematik

Einführung

Die Finanzmathematik dieses Kurses beschränkt sich auf die Zinsrechnung und die Rentenrechnung. Bei der Zinsrechnung wird berechnet, was Kapital zu einem anderen (früheren oder späteren) Zeitpunkt wert ist, wenn am Markt ein bestimmter Zins herrscht.

Dabei wird unterschieden, ob

- der Wert des Kapitals zu einem späteren Zeitpunkt ermittelt werden soll (Ich habe 100 Euro und lege sie 1 Jahr lang zu 5% an). Man sagt das Kapital wird „aufgezinst".

- der Wert des Kapitals zu einem früheren Zeitpunkt ermittelt werden soll (Ich möchte in einem Jahr 100 Euro haben und möchte wissen, wie viel Geld ich heute zu 5% anlegen muss). Dies nennt man „abzinsen".

Als „Rente" werden regelmäßige Zahlungen gleicher Höhe bezeichnet. Bei der Rentenrechnung geht es darum, diese zu bewerten. Beispiel: Ich habe in der Lotterie gewonnen und werde für die kommenden 5 Jahre monatlich 1.000€ bekommen. Ich möchte diese Zahlungen jetzt an dich verkaufen. Die Rentenrechnung beschäftigt sich mit der Bewertung dieser Zahlung.

Finanzmathematische Aufgaben werden in Klausuren sehr gerne gestellt, deshalb werde ich diesen Bereich auch trotz der teilweise sehr einfachen Inhalte sehr ausführlich erläutern. Du wirst in der Klausur aller Wahrscheinlichkeit nach reine Aufgaben zur Finanzmathematik bekommen, wirst die Finanzmathematik aber auch ganz sicher bei Aufgaben zur Investition und Finanzierung benötigen.

Der Zeitwert des Geldes

Man kann eigentlich die gesamte Finanzmathematik dieses Kurses auf einer Seite erklären - wenn du verstehst, warum eine Zahlung zu verschiedenen Zeitpunkten verschieden viel wert ist, kannst du dir alle Rechnungen davon ableiten.

Der Wert einer Zahlung oder eines Geldbetrages schwankt in den meisten Fällen mit der Zeit. Wenn ich 100 Euro vergrabe und sie nach 10 Jahren wieder raushole, dann wird ihr Wert wahrscheinlich gefallen sein. Das liegt ganz einfach daran, dass die Preise tendenziell mit der Zeit steigen (Inflation). Darüber hinaus gibt es aber noch einen Effekt der Entwertung. Indem ich mein Geld vergraben habe, sind mir Erträge entgangen. Ich hätte dieses Geld für mich arbeiten lassen können und einen Zins erzielen können.

In der Finanzmathematik ist für den Wert des Geldes nicht die Kaufkraft entscheidend, sondern die Ertragskraft bzw. der Zins. Besteht für mich die Möglichkeit, 100€ ein Jahr lang zu 10% anzulegen, dann sind 100€ heute genauso viel wert wie 110€ in einem Jahr. Wichtig dabei ist, dass der erzielbare Zins sicher ist. Wäre der Zins von 10% in einem Jahr mit einem Risiko verbunden, so würde ich evtl. die sicheren 100€ heute höher bewerten als die unsicheren 110€ in einem Jahr. Zur Bewertung unsicherer Zahlungsreihen kommen wir später. Jetzt ist erst einmal wichtig: Bei der Bewertung einer Zahlung benutzen wir immer den risikolosen Zinssatz. Dieser wird auch Kalkulationszins genannt.

Der Zeitwert des Geldes, also der Wert des Geldes in Abhängigkeit von der Zeit, ist natürlich stark von der Höhe des Kalkulationszinses abhängig. Bei einem Zins von 0% würde sich der Wert des Geldes beispielsweise nicht ändern. Bei einem Zinssatz von 100% pro Jahr halbiert sich der Wert des Geldes in einem Jahr.

Wichtig für den Bereich der Investition und Finanzierung ist es nun, Zahlungen, die an 2 oder mehr verschiedenen Zeitpunkten getätigt werden, vergleichbar zu machen.

Beispiel:

Was ist mehr wert: 100€ heute oder 110€ in einem Jahr?

Um Zahlungen vergleichbar zu machen, muss man sie auf dieselbe zeitliche Ebene bringen. Dies geschieht durch Aufzinsen und Abzinsen. Möchte ich eine Zahlung von 100€ heute mit einer Zahlung von 110€ in einem Jahr vergleichen (Zinssatz 5%), so kann ich entweder…

- die 100€ aufzinsen: $100 * 1{,}05 = 105€$

- oder die 110€ abzinsen: $\frac{110}{1{,}05} = 104{,}76€$

100€ haben also in einem Jahr einen Wert von 105€. 110€ in einem Jahr haben heute einen Wert von 104,76€. Ändert sich der Zinssatz, so ändern sich auch diese Werte.

3.1 Zinsrechnung

Der einfachste und eigentlich triviale Fall der Finanzmathematik ist die Zinsrechnung. Die Fragestellung hier ist: Wie verändert sich der Wert meines Kapitals mit der Zeit, wenn ich es verzinslich anlege?

Bei diesen Aufgaben werden immer drei Größen gegeben:

- Ein Geldbetrag c.

- Ein Zinssatz r.

- Ein Zeitraum t.

Lege ich Kapital in Höhe von $c = 100€$ für $t = 2$ Perioden zu $r = 10\%$ an, so berechnet man den Kapitalbetrag in 2 Jahren folgendermaßen:

Kapital nach einem Jahr:

$$100 + 0{,}1 * 100 = 110$$

Der Betrag von 110€ wird nun erneut für ein Jahr angelegt:

$$110 + 0{,}1 * 110 = 121$$

Die erste Rechnung lässt sich auch schreiben als:

$$1{,}1 * 100 = 110$$

Genauso kann die zweite Rechnung geschrieben werden:

$$1{,}1 * 110 = 121$$

Möchte ich die Rechnung nicht in 2 Schritten machen, so kann ich diese vereinfachen zu:

$$1{,}1 * (1{,}1 * 100) = 100 * 1{,}1^2$$

Allgemein kann man nun schreiben: $c_t = c_0 * (1 + r)^t$

Die Zinsen aus der Wiederanlage der Zinsen einer Periode in späteren Perioden nennt man übrigens Zinseszins.

Beispiel:

Ein Investor legt 1.000 € für 4 Jahre zu 5% p.a. an. Berechne das Vermögen des Investors nach 3 Jahren. Wie hoch ist der Zins des letzten Jahres?

Antwort:

Das Vermögen in drei Jahren beträgt:

$$c_3 = c_0 * (1 + r)^3 = 1.000 * 1{,}05^3 = 1.157{,}63€$$

5% Zinsen fallen nun auf die 1.000€ und die bereits angefallenen Zinsen von 157,63€ an:

$$1.157{,}63 * 5\% = 57{,}88€$$

Achtung: Sollte der Zins nicht über alle Perioden gleich sein, so musst du für jede Periode einzeln die Zinsen berechnen.

Beispiel: Ein Investor legt 1.000€ ein Jahr zu 5% und eines zu 10% an. Berechne das Vermögen nach 2 Jahren.

$$1.000 * 1{,}05 * 1{,}1 = 1.155€$$

3.2 Abzinsung

Ein wenig anspruchsvoller ist die Abzinsung. Hier geht es um die Fragestellung: Was ist eine Zahlung von 100€ in 3 Jahren heute wert, wenn der Zins 10% beträgt? Anders könnte man formulieren: Wie viel Geld muss ich bei einem Zins von 10% heute anlegen, um in 3 Jahren 100€ zu besitzen?

Mathematisch schreibt man das als:

$$c_0 * (1 + r)^t = c_t$$

Umgeformt nach c_0:

$$c_0 = \frac{c_t}{(1 + r)^t}$$

Für das Beispiel ergibt sich:

$$\frac{100}{1{,}1^3} = 75{,}13$$

Man muss also heute 75,13€ anlegen, um in 3 Jahren 100€ zu besitzen. Mach zur Übung die Probe und zinse die 75,13€ über drei Jahre zu 10% auf.

Den Faktor $\frac{1}{(1+r)^t}$ nennt man **Abzinsungsfaktor**.

3.3 Finanzmathematische Tabellen zur Zinsrechnung

Wie du gesehen hast, ist die Berechnung der Auf- und Abzinsungsfaktoren relativ einfach. In der Klausur kannst du die Faktoren auch an einer Tabelle ablesen. Die Zinsfaktoren sind nur von der Laufzeit und dem Zinssatz abhängig. Aus der Tabelle kannst du dann den entsprechenden Wert entnehmen.

Tabelle Aufzinsungsfaktoren:

Kalkulationszinssatz

Jahre	3%	3,5%	4%	4,5%	5%	5,5%	6%	6,5%	7%	7,5%	8%	8,5%	9%
1	1,0300	1,0350	1,0400	1,0450	1,0500	1,0550	1,0600	1,0650	1,0700	1,0750	1,0800	1,0850	1,0900
2	1,0609	1,0712	1,0816	1,0920	1,1025	1,1130	1,1236	1,1342	1,1449	1,1556	1,1664	1,1772	1,1881
3	1,0927	1,1087	1,1249	1,1412	1,1576	1,1742	1,1910	1,2079	1,2250	1,2423	1,2597	1,2773	1,2950
4	1,1255	1,1475	1,1699	1,1925	1,2155	1,2388	1,2625	1,2865	1,3108	1,3355	1,3605	1,3859	1,4116
5	1,1593	1,1877	1,2167	1,2462	1,2763	1,3070	1,3382	1,3701	1,4026	1,4356	1,4693	1,5037	1,5386
6	1,1941	1,2293	1,2653	1,3023	1,3401	1,3788	1,4185	1,4591	1,5007	1,5433	1,5869	1,6315	1,6771
7	1,2299	1,2723	1,3159	1,3609	1,4071	1,4547	1,5036	1,5540	1,6058	1,6590	1,7138	1,7701	1,8280
8	1,2668	1,3168	1,3686	1,4221	1,4775	1,5347	1,5938	1,6550	1,7182	1,7835	1,8509	1,9206	1,9926
9	1,3048	1,3629	1,4233	1,4861	1,5513	1,6191	1,6895	1,7626	1,8385	1,9172	1,9990	2,0839	2,1719
10	1,3439	1,4106	1,4802	1,5530	1,6289	1,7081	1,7908	1,8771	1,9672	2,0610	2,1589	2,2610	2,3674
11	1,3842	1,4600	1,5395	1,6229	1,7103	1,8021	1,8983	1,9992	2,1049	2,2156	2,3316	2,4532	2,5804
12	1,4258	1,5111	1,6010	1,6959	1,7959	1,9012	2,0122	2,1291	2,2522	2,3818	2,5182	2,6617	2,8127
13	1,4685	1,5640	1,6651	1,7722	1,8856	2,0058	2,1329	2,2675	2,4098	2,5604	2,7196	2,8879	3,0658
14	1,5126	1,6187	1,7317	1,8519	1,9799	2,1161	2,2609	2,4149	2,5785	2,7524	2,9372	3,1334	3,3417
15	1,5580	1,6753	1,8009	1,9353	2,0789	2,2325	2,3966	2,5718	2,7590	2,9589	3,1722	3,3997	3,6425
20	1,8061	1,9898	2,1911	2,4117	2.6533	2,9178	3,2071	3,5236	3,8697	4,2479	4,6610	5,1120	5,6044

Lege ich 100€ für 5 Jahre zu 7,5% an, so beträgt mein Vermögen nach 5 Jahren also

$$100 * 1{,}4356 = 143{,}56€$$

Tabelle Abzinsungsfaktoren:

Kalkulationszinssatz

Jahre	3%	3,5%	4%	4,5%	5%	5,5%	6%	6,5%	7%	7,5%	8%	8,5%	9%
1	0,9709	0,9662	0,9615	0,9569	0,9524	0,9479	0,9434	0,9390	0,9346	0,9302	0,9259	0,9217	0,9174
2	0,9426	0,9335	0,9246	0,9157	0,9070	0,8985	0,8900	0,8817	0,8734	0,8653	0,8573	0,8495	0,8417
3	0,9151	0,9019	0,8890	0,8763	0,8638	0,8516	0,8396	0,8278	0,8163	0,8050	0,7938	0,7829	0,7722
4	0,8885	0,8714	0,8548	0,8386	0,8227	0,8072	0,7921	0,7773	0,7629	0,7488	0,7350	0,7216	0,7084
5	0,8626	0,8420	0,8219	0,8025	0,7835	0,7651	0,7473	0,7299	0,7130	0,6966	0,6806	0,6650	0,6499
6	0,8375	0,8135	0,7903	0,7679	0,7462	0,7252	0,7050	0,6853	0,6663	0,6480	0,6302	0,6129	0,5963
7	0,8131	0,7860	0,7599	0,7348	0,7107	0,6874	0,6651	0,6435	0,6227	0,6028	0,5835	0,5649	0,5470
8	0,7894	0,7594	0,7307	0,7032	0,6768	0,6516	0,6274	0,6042	0,5820	0,5607	0,5403	0,5207	0,5019
9	0,7664	0,7337	0,7026	0,6729	0,6446	0,6176	0,5919	0,5674	0,5439	0,5216	0,5002	0,4799	0,4604
10	0,7441	0,7089	0,6756	0,6439	0,6139	0,5854	0,5584	0,5327	0,5083	0,4852	0,4632	0,4423	0,4224
11	0,7224	0,6849	0,6496	0,6162	0,5847	0,5549	0,5268	0,5002	0,4751	0,4513	0,4289	0,4076	0,3875
12	0,7014	0,6618	0,6246	0,5897	0,5568	0,5260	0,4970	0,4697	0,4440	0,4199	0,3971	0,3757	0,3555
13	0,6810	0,6394	0,6006	0,5643	0,5303	0,4986	0,4688	0,4410	0,4150	0,3906	0,3677	0,3463	0,3262
14	0,6611	0,6178	0,5775	0,5400	0,5051	0,4726	0,4423	0,4141	0,3878	0,3633	0,3405	0,3191	0,2992
15	0,6419	0,5969	0,5553	0,5167	0,4810	0,4479	0,4173	0,3888	0,3624	0,3380	0,3152	0,2941	0,2745
16	0,6232	0,5767	0,5339	0,4945	0,4581	0,4246	0,3936	0,3651	0,3387	0,3144	0,2919	0,2711	0,2519
17	0,6050	0,5572	0,5134	0,4732	0,4363	0,4024	0,3714	0,3428	0,3166	0,2925	0,2703	0,2499	0,2311
18	0,5874	0,5384	0,4936	0,4528	0,4155	0,3815	0,3503	0,3219	0,2959	0,2720	0,2502	0,2303	0,2120
19	0,5703	0,5202	0,4746	0,4333	0,3957	0,3616	0,3305	0,3022	0,2765	0,2531	0,2317	0,2122	0,1945
20	0,5537	0,5026	0,4564	0,4146	0,3769	0,3427	0,3118	0,2838	0,2584	0,2354	0,2145	0,1956	0,1784
21	0,5375	0,4856	0,4388	0,3968	0,3589	0,3249	0,2942	0,2665	0,2415	0,2190	0,1987	0,1803	0,1637
22	0,5219	0,4692	0,4220	0,3797	0,3418	0,3079	0,2775	0,2502	0,2257	0,2037	0,1839	0,1662	0,1502
23	0,5067	0,4533	0,4057	0,3634	0,3256	0,2919	0,2618	0,2349	0,2109	0,1895	0,1703	0,1531	0,1378
24	0,4919	0,4380	0,3901	0,3477	0,3101	0,2767	0,2470	0,2206	0,1971	0,1763	0,1577	0,1412	0,1264
25	0,4776	0,4231	0,3751	0,3327	0,2953	0,2622	0,2330	0,2071	0,1842	0,1640	0,1460	0,1301	0,1160
26	0,4637	0,4088	0,3607	0,3184	0,2812	0,2486	0,2198	0,1945	0,1722	0,1525	0,1352	0,1199	0,1064
27	0,4502	0,3950	0,3468	0,3047	0,2678	0,2356	0,2074	0,1826	0,1609	0,1419	0,1252	0,1105	0,0976
28	0,4371	0,3817	0,3335	0,2916	0,2551	0,2233	0,1956	0,1715	0,1504	0,1320	0,1159	0,1019	0,0895
29	0,4243	0,3687	0,3207	0,2790	0,2429	0,2117	0,1846	0,1610	0,1406	0,1228	0,1073	0,0939	0,0822
30	0,4120	0,3563	0,3083	0,2670	0,2314	0,2006	0,1741	0,1512	0,1314	0,1142	0,0994	0,0865	0,0754
35	0,3554	0,3000	0,2534	0,2143	0,1813	0,1535	0,1301	0,1103	0,0937	0,0796	0,0676	0,0575	0,0490
40	0,3066	0,2526	0,2083	0,1719	0,1420	0,1175	0,0972	0,0805	0,0668	0,0554	0,0460	0,0383	0,0318

Eine Zahlung von 100 € in 5 Jahren bei einem Zinssatz von 7,5 hätte heute also einen Wert von

$$100 * 0{,}6966 = 69{,}66€$$

3.4 Rentenrechnung

Bei der Rentenrechnung geht es darum, eine regelmäßige Zahlung gleich hoher Beträge zum Zeitpunkt $t = 0$ zu bewerten.

Dies kann einerseits geschehen, indem man alle einzelnen Zahlungen mit den entsprechenden Abzinsungsfaktoren multipliziert und das Ergebnis addiert. Diese Methode hast du im letzten Kapitel kennengelernt. Besonders für lange Zeitreihen ist dies aber sehr arbeitsintensiv. Durch die Nutzung von Rentenbarwertfaktoren kann man die Berechnung allerdings in einem Schritt machen.

Auf die Herleitung möchte ich verzichten, da diese nicht klausurrelevant sein wird.

Rentenbarwertfaktor

Der Rentenbarwertfaktor ist der Faktor, mit dem ich die Zahlung einer einzelnen Periode multiplizieren muss, um den Wert der gesamten Zahlungsreihe zum Zeitpunkt $t = 0$ (den Barwert) zu bekommen. Der Rentenbarwertfaktor ist abhängig von der Periodenanzahl und dem Periodenzins.

Man schreibt für den Rentenbarwertfaktor auch RBF.

Mathematisch gilt:

$$RBF(T, r) = \frac{1 - (1 + r)^{-T}}{r}$$

wobei T für die Anzahl an Perioden steht.

Beispiel: Ein Investor erhält über die kommenden 10 Jahre zum Ende jeden Jahres eine Zahlung von 10.000€. Der Zins ist über die gesamte Laufzeit fest bei 10% p.a. Er möchte den Wert dieser Zahlungen zum jetzigen Zeitpunkt ermitteln.

Antwort: Zur Berechnung benötigt man den Rentenbarwertfaktor für 10 Jahre und 10%:

$$RBF\ (10\ Jahre, 10\%) = \frac{1 - (1 + 0{,}1)^{-10}}{0{,}1} = \frac{1 - 0{,}3855}{0{,}1} = 6{,}14$$

Auch zu Rentenbarwertfaktoren gibt es Tabellen. Da die Berechnung der RBFs etwas aufwendiger ist, solltest du die Tabellen regelmäßig nutzen.

Tabelle Rentenbarwertfaktoren:

Kalkulationszinssatz

Jahre	3%	3,5%	4%	4,5%	5%	5,5%	6%	6,5%	7%	7,5%	8%	8,5%	9%
1	0,9709	0,9662	0,9615	0,9569	0,9524	0,9479	0,9434	0,9390	0,9346	0,9302	0,9259	0,9217	0,9174
2	1,9135	1,8997	1,8861	1,8727	1,8594	1,8463	1,8334	1,8206	1,8080	1,7956	1,7833	1,7711	1,7591
3	2,8286	2,8016	2,7751	2,7490	2,7232	2,6979	2,6730	2,6485	2,6243	2,6005	2,5771	2,5540	2,5313
4	3,7171	3,6731	3,6299	3,5875	3,5460	3,5052	3,4651	3,4258	3,3872	3,3493	3,3121	3,2756	3,2397
5	4,5797	4,5151	4,4518	4,3900	4,3295	4,2703	4,2124	4,1557	4,1002	4,0459	3,9927	3,9406	3,8897
6	5,4172	5,3286	5,2421	5,1579	5,0757	4,9955	4,9173	4,8410	4,7665	4,6938	4,6229	4,5536	4,4859
7	6,2303	6,1145	6,0021	5,8927	5,7864	5,6830	5,5824	5,4845	5,3893	5,2966	5,2064	5,1185	5,0330
8	7,0197	6,8740	6,7327	6,5959	6,4632	6,3346	6,2098	6,0888	5,9713	5,8573	5,7466	5,6392	5,5348
9	7,7861	7,6077	7,4353	7,2688	7,1078	6,9522	6,8017	6,6561	6,5152	6,3789	6,2469	6,1191	5,9952
10	8,5302	8,3166	8,1109	7,9127	7,7217	7,5376	7,3601	7,1888	7,0236	6,8641	6,7101	6,5613	6,4177
11	9,2526	9,0016	8,7605	8,5289	8,3064	8,0925	7,8869	7,6890	7,4987	7,3154	7,1390	6,9690	6,8052
12	9,9540	9,6633	9,3851	9,1186	8,8633	8,6185	8,3838	8,1587	7,9427	7,7353	7,5361	7,3447	7,1607
13	10,6350	10,3027	9,9856	9,6829	9,3936	9,1171	8,8527	8,5997	8,3577	8,1258	7,9038	7,6910	7,4869
14	11,2961	10,9205	10,5631	10,2228	9,8986	9,5896	9,2950	9,0138	8,7455	8,4892	8,2442	8,0101	7,7862
15	11,9379	11,5174	11,1184	10,7395	10,3797	10,0376	9,7122	9,4027	9,1079	8,8271	8,5595	8,3042	8,0607
16	12.5611	12.0941	11.6523	11.2340	10.8378	10.4622	10.1059	9.7678	9.4466	9.1415	8.8514	8.5753	8.3126
17	13,1661	12,6513	12,1657	11,7072	11,2741	10,8646	10,4773	10,1106	9,7632	9,4340	9,1216	8,8252	8,5436
18	13,7535	13,1897	12,6593	12,1600	11,6896	11,2461	10,8276	10,4325	10,0591	9,7060	9,3719	9,0555	8,7556
19	14,3238	13,7098	13,1339	12,5933	12,0853	11,6077	11,1581	10,7347	10,3356	9,9591	9,6036	9,2677	8,9501
20	14,8775	14,2124	13,5903	13,0079	12,4622	11,9504	11,4699	11,0185	10,5940	10,1945	9,8181	9,4633	9,1285
21	15,4150	14,6980	14,0292	13,4047	12,8212	12,2752	11,7641	11,2850	10,8355	10,4135	10,0168	9,6436	9,2922
22	15,9369	15,1671	14,4511	13,7844	13,1630	12,5832	12,0416	11,5352	11,0612	10,6172	10,2007	9,8098	9,4424
23	16,4436	15,6204	14,8568	14,1478	13,4886	12,8750	12,3034	11,7701	11,2722	10,8067	10,3711	9,9629	9,5802
24	16,9355	16,0584	15,2470	14,4955	13,7986	13,1517	12,5504	11,9907	11,4693	10,9830	10,5288	10,1041	9,7066
25	17,4131	16,4815	15,6221	14,8282	14,0939	13,4139	12,7834	12,1979	11,6536	11,1469	10,6748	10,2342	9,8226
26	17,8768	16,8904	15,9828	15,1466	14,3752	13,6625	13,0032	12,3924	11,8258	11,2995	10,8100	10,3541	9,9290
27	18.3270	17.2854	16.3296	15.4513	14.6430	13.8981	13.2105	12.5750	11.9867	11.4414	10.9352	10.4646	10.0266
28	18,7641	17,6670	16,6631	15,7429	14,8981	14,1214	13,4062	12,7465	12,1371	11,5734	11,0511	10,5665	10,1161
29	19,1885	18,0358	16,9837	16,0219	15,1411	14,3331	13,5907	12,9075	12,2777	11,6962	11,1584	10,6603	10,1983
30	19,6004	18,3920	17,2920	16,2889	15,3725	14,5337	13,7648	13,0587	12,4090	11,8104	11,2578	10,7468	10,2737
35	21,4872	20,0007	18,6646	17,4610	16,3742	15,3906	14,4982	13,6870	12,9477	12,2725	11,6546	11,0878	10,5668
40	23,1148	21,3551	19,7928	18,4016	17,1591	16,0461	15,0463	14,1455	13,3317	12,5944	11,9246	11,3145	10,7574
45	24,5187	22,4955	20,7200	19,1563	17,7741	16,5477	15,4558	14,4802	13,6055	12,8186	12,1084	11,4653	10,8812
50	25,7298	23,4556	21,4822	19,7620	18,2559	16,9315	15,7619	14,7245	13,8007	12,9748	12,2335	11,5656	10,9617
55	26,7744	24,2641	22,1086	20,2480	18,6335	17,2252	15,9905	14,9028	13,9399	13,0836	12,3186	11,6323	11,0140
60	27,6756	24,9447	22,6235	20,6380	18,9293	17,4499	16,1614	15,0330	14,0392	13,1594	12,3766	11,6766	11,0480
65	28,4529	25,5178	23,0467	20,9510	19,1611	17,6218	16,2891	15,1280	14,1099	13,2122	12,4160	11,7061	11,0701
70	29,1234	26,0004	23,3945	21,2021	19,3427	17,7533	16,3845	15,1973	14,1604	13,2489	12,4428	11,7258	11,0844

Eine Rente von 1.000€ pro Jahr über 10 Jahre bei einem Zins von 5% hat also zum Zeitpunkt $t = 0$ einen Wert von:

$$1.000 * 7{,}7217 = 7.721{,}7€$$

Rentenbarwert bei wechselndem Periodenzins

Ist der Zinssatz nicht über die Laufzeit konstant, so musst du alle Zahlungen einzeln abzinsen, wie du es im letzten Kapitel gelernt hast.

Beispiel: Ein Investor bezieht für die kommenden drei Jahre eine Rente in Höhe von 1.000€ p.a. Der Zinssatz beträgt 5% im ersten Jahr, 10% im zweiten Jahr und 2% im dritten Jahr.Was ist diese Rente heute wert?

Antwort: Die Zahlung des dritten Jahres muss für 1 Jahr zu 2%, für ein Jahr zu 10% und für 1 Jahr zu 5% abgezinst werden. Die Zahlung des zweiten Jahres muss für ein Jahr zu 10% und für ein Jahr zu 5% abgezinst werden. Die Zahlung des ersten Jahres muss für ein Jahr zu 5% abgezinst werden. Die Summe der abgezinsten Zahlungen ergibt den Barwert der Rente.

Rentenbarwert:

$$\frac{1.000}{1{,}02 * 1{,}1 * 1{,}05} + \frac{1.000}{1{,}1 * 1{,}05} + \frac{1.000}{1{,}05} = 848{,}82 + 865{,}8 + 952{,}38 = 2.667€$$

Kombination aus Abzinsung und Rentenbarwertfaktor

Es ist möglich, dass eine Kombination auf Rentenbarwertrechnung und Auf- oder Abzinsung in der Klausur drann kommt. Beginnt beispielsweise eine Rente erst in 2 Jahren und läuft für 8 Jahre, so darfst du nicht den Rentenbarwert mit einer Laufzeit von 10 Jahren berechnen - in den ersten 2 Jahren kommen ja keine Zahlungen. Du berechnest stattdessen den Barwert über 8 Jahre. Dies ist der Wert der Rente in 2 Jahren. Um den heutigen Wert der Rente zu erhalten, muss der Rentenbarwert noch 2 Perioden abgezinst werden.

Rentenbarwert der ewigen Rente

Sollte eine Rente ewig gezahlt werden, so kann man dies nicht mehr per Hand ausrechnen. Der Wert wächst aber auch nicht ins Unendliche, da die späten Zahlungen immer stärker abgezinst werden und daher den Barwert immer weniger erhöhen. Der Rentenbarwertfaktor der ewige Rente läßt sich durch folgende Formel relativ leicht ermitteln:

$$RBF(\infty, r) = \frac{1}{r}$$

Beispiel:

Ein Investor erhält von nun an eine ewige Rente in Höhe von 1.000 p.a. ausbezahlt. Der Zins ist durchgehen 10%.

Der Wert dieser Rente beträgt: $\frac{1.000}{0{,}1} = 10.000€$

Eine ewige Rente ist gleichzusetzen mit einer Investition in ein Wertpapier, das man nie wieder verkauft. Ein Wertpapier, das mit 10% verzinst und jährlich $1.000€$ auszahlt, hat einen Preis von $10.000€$.

Rentenbarwert einer ewigen Rente mit positiven Zuwachsraten

Verzeichnet die ewige Rente stetige positive Zuwachsraten, so gibt es zwei Möglichkeiten:

- Die Zuwachsrate ist höher als der Zinssatz. Dann ist der Kapitalwert unendlich hoch.

- Die Zuwachsrate ist niedriger als der Zins. Dann verringert man den Zins um die Zuwachsrate und berechnet den Kapitalwert mit dem niedrigeren Zinssatz.

Beispiel:

Eine ewige Rente von 1.000€ wächst jedes Jahr um 5%. Der Zinssatz ist 6%.

Der Kapitalwert beträgt nun:

$$\frac{1.000}{6\% - 5\%} = 100.000$$

3.5 Annuitätenrechnung

Die Annuitätenrechnung ist die Umkehrform der Rentenbarwertrechnung. Während bei der Rentenbarwertrechnung der Wert einer Rente berechnet werden soll, wird bei der Annuitätenrechnung davon ausgegangen, dass der Kapitalwert gegeben ist und als Rente über eine bestimmte Anzahl an Perioden ausgeschüttet werden soll.

Beispiel: Ein Investor verfügt über ein Vermögen von $10.000€$ und möchte über die kommenden 10 Jahre jährlich einen gleichhohen Betrag entnehmen. Welchen Maximalbetrag kann er entnehmen, wenn der Zinssatz durchgehend 5% beträgt?

Antwort: Man stellt zunächst die Formel für den Rentenbarwert auf:

$$10.000 = e * RBF(10\,Jahre, 5\%)$$

Wobei e für die Rentenzahlung bzw. Annuität steht.

Aufgelöst nach e ergibt sich:

$$e = \frac{10.000}{7{,}7217} = 1.295{,}05€$$

Du kannst hier zur Übung die Probe machen und den Kapitalwert der Rente von 1.295,05 berechnen.

Den Faktor $\frac{1}{RBF}$ nennt man Annuitätenfaktor und schreibt kurz: $ANF\ (T, r)$.

Auch für die Annuitäten gibt es eine Tabelle, die aus den Kehrwerten der Rentenbarwertfaktoren besteht.

Äquivalente Annuität

Bei der äquivalenten Annuität ist die Frage: „ Wieviel kann man aus einer Investition jedes Periode entnehmen, ohne dass diese unvorteilhaft wird?“ Die äquivalente Annuität ist also die Annuität des Barwertes.

Aufgaben zu 3.0

Aufgabe 3.1

Ein Investor legt sein Kapital von 10.000€ für 7 Jahre zu 4% p.a. an. Berechne das Vermögen nach 5 Jahren.

Aufgabe 3.2

Ein Student möchte sich kommendes Semester ein Lehrvideo von fernuni-online.de zum Preis von 40€ bestellen. Der Zinssatz pro Semester beträgt 2%. Wie viel Geld muss er jetzt anlegen, um den Kaufpreis bezahlen zu können?

Aufgabe 3.3

Du hast die Möglichkeit, 1.000€ für 2 Jahre zu 10% p.a. anzulegen. Ich biete dir an, dir für 2 Jahre 20,5% zu zahlen (einmalig zum Ende der 2 Jahre). Solltest du annehmen? Begründe.

Aufgabe 3.4

Du möchtest dir einen Sportwagen kaufen und dir wird folgende Finanzierung angeboten:

a) 100.000 sofort

b) 50.000 sofort und 60.000 in 2 Jahren.

c) 40.000 in einem Jahr, 40.000 in 3 Jahren und 40.000 in 5 Jahren.

Der Zinssatz beträgt durchgehend 8%. Für welche Zahlungsform entscheidest du dich?

Aufgabe 3.5

Gegeben seien zwei Anleihen mit folgenden Merkmalen:

	Kurs	Laufzeit	Nominalzins	Rückzahlungsbetrag
Anleihe 1	100	5 Jahre	6%	102
Anleihe 2	100	4 Jahre	6%	106

Der Marktzins betrage 8%. Welche Anleihe ist die bessere?

Aufgabe 3.6

Du möchtest 10.000€ für 10 Jahre anlegen und hast 3 Angebote vorliegen:

a) 10% p.a.

b) Nach 10 Jahren 26.000 Rückzahlung.

c) 5 Jahre lang 8% Zinsen und dann 5 Jahre lang 12% Zinsen.

Aufgabe 3.7

Ein Investor legt 50.000€ zu 10% p.a. über 5 Jahre an und entnimmt jedes Jahr 10.000€. Berechne den Endwert.

Aufgabe 3.8

Ein Anleger verfügt über ein Vermögen von 100.000€. Welchen gleichhohen Betrag könnte er jährlich bei einem durchgehend gleichen Zinssatz von 5% in den kommenden 5 Jahren maximal entnehmen?

Aufgabe 3.9

Berechne die Kapitalwerte für folgende Sachverhalte unter der Annahme eines konstanten Zinses von 10%p.a.:

a) Es besteht ein Zahlungsanspruch über die kommenden 5 Jahre von jeweils 10.000€.

b) Bei einem Glücksspiel ist der Gewinn eine ewige Rente von 40.000€ p.a.

c) Ein Wertpapier zahlt im kommenden Jahr 100€ und danach eine ewige Rente von 10€.

d) Ein Mietvertrag über 5 Jahre führt zu Mieteinzahlungen von 10.000€ p.a. Die Mieteinnahmen steigen allerdings jährlich mit 10%.

Lösungen zu 3.0

Lösung zu 3.1

Es ist natürlich egal, für wie lange er das Geld insgesamt anlegt. Nach 5 Jahren wurde das Kapital 5 mal zu 4% verzinst:

$$10.000 * 1{,}04^5 = 12.166{,}53€$$

Lösung zu 3.2

Der Kaufpreis muss um eine Periode abgezinst werden.

$$\frac{40}{1{,}02} = 39{,}21€$$

Lösung zu 3.3

Nein. Die Verzinsung von 10% p.a. ergibt ein Endvermögen von 1.210€. Eine Verzinsung von 20,5% über 2 Jahre ergibt nur ein Endvermögen von 1.205€. Man muss den Zinseszinseffekt berücksichtigen.

Lösung zu 3.4

Es müssen die Kapitalwerte berechnet werden:

a) $100.000€$

b) $50.000 + \frac{60.000}{1{,}08^2} = 101.440{,}33€$

c) $\frac{40.000}{1{,}08} + \frac{40.000}{1{,}08^3} + \frac{40.000}{1{,}08^5} = 96.013{,}65€$

Alternative c) ist die günstigste!

Lösung zu 3.5

Die Zahlungsreihen zu den beiden Anleihen sind folgende:

Jahr	0	1	2	3	4	5
Anleihe 1	-100	6	6	6	6	108
Anleihe 2	-100	6	6	6	112	

Beide Zahlungsreihen werden nun auf $t = 0$ abgezinst.

Jahr	0	1	2	3	4	5
Anleihe 1	-100	6	6	6	6	108
Anleihe 2	-100	6	6	6	112	
Aufzinsungsfaktor	1,00	1,08	1,17	1,26	1,36	1,47
Anleihe 1 abgezinst	-100	5,56	5,14	4,76	4,41	73,5
Anleihe 1 abgezinst	-100	5,56	5,14	4,76	82,32	

Kapitalwert der Anleihe 1: -6,62

Kapitalwert der Anleihe 2: -2,21

Die Anleihe 2 ist der Anleihe 1 vorzuziehen.

Lösung zu 3.6

Hier kannst du die Kapitalwerte oder die Endwerte berechnen. Ich berechne die Endwerte:

a) $10.000 * 1{,}1^{10} = 25.937{,}42€$

b) 26.000€

c) $10.000 * 1{,}08^5 * 1{,}12^5 = 10.000 * 1{,}469 * 1{,}762 = 25.894{,}58€$

Alternative b) ist optimal.

Lösung zu 3.7

Es gibt mehrere Möglichkeiten, diese Aufgabe zu lösen. Ich empfehle, den Kapitalwert der Entnahmen von den 50.000€ abzuziehen und die Differenz dann aufzuzinsen.

$$\left(50.000 - 10.000 * RBF(5Jahre\ ;\ 10\%)\right) * 1{,}1^5 = (50.000 - 37.908) * 1{,}1^5$$

$$= 12.092 * 1{,}61 = 19.474{,}3€$$

Lösung zu 3.8

Hier ist nach der Annuität gefragt:

$$100.000 * ANF(5; 5\%) = 100.000 * 0{,}231 = 23.100€$$

Lösung zu 3.9

a)$10.000 * RBF(5; 10\%) = 10.000 * 3{,}7908 = 37.908€$

b) Der Barwert der ewigen Rente ist der Rentenbetrag geteilt durch den Zinssatz. Antwort: 400.000€

c) Der Barwert der ewigen Rente in einem Jahr ist: $10/10\% = 100$.

In einem Jahr ist der Wert des Wertpapiers 100€ plus den Wert der ewigen Rente, die in Jahr zwei beginnt. Der Wert der ewigen Rente in 2 Jahren ist 100€. Es müssen also 100€ einmal für zwei Jahre und einmal für 1 Jahr abgezinst werden.

$$\frac{100}{1{,}1} + \frac{100}{1{,}21} = 173{,}55$$

d) Zuwachsrate und Kalkulationszins gleichen einander genau aus. Der Barwert ist die Summe der Zahlungen: 50.000€.

4.1 Einführung Differentialrechnung

Bei der Neustrukturierung des Lehrstoffes im WS 2010/2011 sind einige Kapitel weggefallen, die für das Verständnis des Kurses notwendig sind. Daher versuche ich, die Grundlagen für den folgenden Stoff in einer kurzen Einführung zusammenzufassen:

Funktion

Eine Funktion bildet einen Zusammenhang zwischen zwei Mengen ab. Eine Menge besteht aus den unabhängigen Variablen (X-Werten), die andere aus den abhängigen Variablen (Y-Werte). Jedem Element der X-Werte wird dabei ein Element der Y-Werte zugeordnet. Man schreibt für y auch $f(x)$.

Beispiel:

$$y = 2x$$

y ist hier immer doppelt so groß wie x. Es können die verschiedensten Zusammenhänge aus der Realität abgebildet werden. Zum Beispiel: Jede Seite dieses Skriptes ($X =$ Seitenzahl) kostet mich im Druck 2 Cent ($Y =$ Druckkosten). 100 Seiten kosten mich also $2 * 100 = 200$ Cent.

Definitionsbereich. Der Definitionsbereich umfasst alle möglichen X-Werte für die die Funktion definiert ist. Die Funktion

$$y = \frac{1}{x}$$

ist beispielsweise nicht für $x = 0$ definiert. Man schreibt: $D_f = R \setminus \{0\}$.

Neben dem mathematischen Definitionsbereich gibt es noch den sachbezogenen Definitionsbereich. In meinem obigen Beispiel für die Druckkosten pro Skriptseite ist eine negative Seitenzahl$(x < 0)$ zwar mathematisch möglich, aber ökonomisch unsinnig.

Wertebereich. Der Wertebereich umfasst alle Werte der Funktion, die Y annehmen kann.

Beispiel: Die Funktion

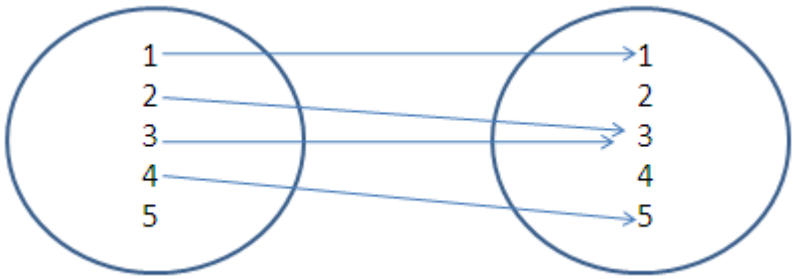
$$\mathrm{y} = x^2$$

nimmt für alle X-Werte nichtnegative Y-Werte an. Der Wertebereich ist

$$W_f = R^+.$$

Neben dem mathematischen Wertebereich gibt es noch den sachbezogenen Wertebereich. In meinem obigen Beispiel für die Druckkosten pro Skriptseite sind negative Druckkosten zwar mathematisch möglich, aber ökonomisch unsinnig.

Analytische Darstellung. Für die Klausur solltest du die folgende Darstellung verstanden haben.



Jeder X-Wert, von dem kein Pfeil abgeht, gehört nicht zum Definitionsbereich. Genauso gehört jeder Y-Wert, bei dem kein Pfeil ankommt. nicht zum Wertebereich. Wichtig ist hier, dass von keinem X-Wert mehr als 1 Pfeil abgehen darf, bei einem Y-Wert aber mehrere Pfeile ankommen dürfen (Eindeutigkeit).

Beispiel:
$y = x^2$

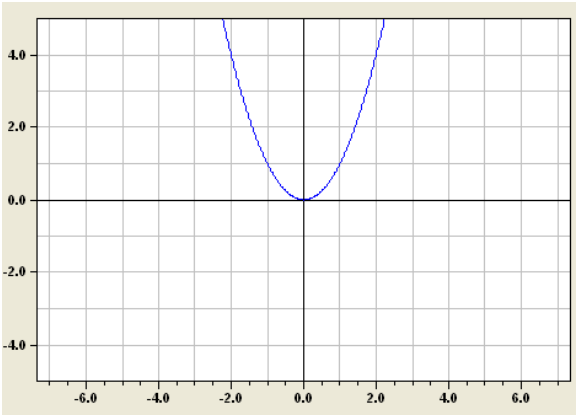
Ergibt sich für $x = 2$ und für $x = -2$ jeweils y=4. Es ist aber nicht möglich, dass für $x = 2$ mehrere verschiedene Y-Werte herauskommen.

Tabellenform.

Bei der Tabellenform werden die zu x gehörenden Elemente y ermittelt und in die Tabelle eingetragen.

X	Y
1	1
2	3
3	3
4	5
5	nicht definiert

Graph. Der Graph ist eine zweidimensionale Darstellung der Funktion. Für $y = x^2$ ergibt sich der folgende Graph:



Wenn du einen Graphen zeichnen willst, solltest du verschiedene X-Werte, beispielsweise 1,2,5,10 ermitteln und die Schnittpunkte mit den Achsen. Diese Punkte werden dann verbunden. Da der Verlauf zwischen den bekannten Punkten aber unbekannt ist, ist dies nur eine Schätzung des wahren Verlaufs. Wie man diese Schätzung so realitätsnah wie möglich zeichnet, wird später bei den Kurvendiskussionen behandelt.

Tipp: Um ein Gefühl für verschiedene Funktionen zu bekommen, empfehle ich dir das Programm „Matheass“, das als Freeware unter www.matheass.de heruntergeladen werden kann. Der Funktionsplotter stellt vom Nutzer vorgegebene Funktionen graphisch dar. Das Programm ist übrigens für die meisten Aufgaben dieses Kurses sehr nützlich.

Exponential- und Logarithmusfunktionen, trigonometrische Funktionen

Bei einer Exponentialfunktion steht die unabhängige Variable x im Exponenten.
Beispiel:

$$y = 2^x$$

Eine besondere Eigenschaft von Exponentialfunktionen ist ihr Wachstum, das sich ständig beschleunigt. Während der Y −Wert zwischen $x = 2$ und $x = 3$ nur um 5 zunimmt, so nimmt er zwischen $x = 3$ und $x = 4$ schon um 7 zu usw. Daher auch der Ausdruck des exponentiellen Wachstums (Beispiel: Kapitalwachstum durch Zinseszins).
Eine besondere Funktion ist die e-Funktion $f(x) = e^x$. Man schreibt auch $f(x) = exp(x)$. E ist die Eulersche Zahl 2,7182… Der Funktionswert der e-Funktion ist immer genauso hoch wie ihre Steigung. Da alle Exponentialfunktionen streng monoton steigend sind, existiert zu jeder auch eine Umkehrfunktion. Diese Umkehrfunktionen sind die Logarithmusfunktionen

$$f(x) = log_a x$$

wobei a die Basis des Logarithmus angibt.

Für Logarithmen gelten folgende Rechenregeln:

1) $log_a(u * v) = log_a u + log_a v$
2) $log_a\left(\frac{u}{v}\right) = log_a u - log_a v$
3) $log_a u^v = v * log_a u$

Beispiel:

Die Umkehrfunktion von

$$y = 2^x$$

findet man folgendermaßen:
Logarithmieren zur Basis 2:

$log_2 y = x.$

Den Logarithmus zur Basis e nennt man den natürlichen Logarithmus. Man schreibt auch $f(x) = lnx$.Für den Logarithmus zur Basis 10 schreibt man auch lgx (dekadischer Logarithmus)..

Zu den **trigonometrischen Funktionen** gehören die Sinus-, Kosinus-, Tangens- und Kotangensfunktionen

Alle diese Funktionen wiederholen sich periodisch im Bereich zwischen -∞ und ∞. Die Länge einer Periode beträgt $2\pi = 6{,}28$.

Wichtige Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen:

$tan\ x = \frac{sin\ x}{cos\ x}$ $\quad$ $cot\ x = \frac{\cos x}{\sin x}$

Da eine Division durch Null nicht definiert ist und $cos\ x$ bei $\pi/2 + n\ \pi$ $(also\ \pi/2\ ;\ 3\pi/2\ ;\ 5\pi/2, \ldots)$und $sin\ x$ beim Vielfachen von π Nullstellen haben, gibt es bei $tan\ x$ und $cot\ x$ an den entsprechenden Stellen Definitionslücken.

$sin^2x + cos^2x = 1$

Nullstellen einer Funktion

Die Anzahl an Nullstellen eines Polynoms entspricht immer dem höchsten Grad der Funktion. Dabei können Nullstellen aber auch mehrfach vorkommen (Die Funktion $y = x^5$ hat zum Beispiel bei $x = 0$ eine fünffache Nullstelle).

Polynome 1ter Ordnung

Um die Nullstelle einer Funktion zu ermitteln wird eien Seite der Funktionsgleichung einfach gleich Null gesetzt und die so entstandene Gleichung wird nach x aufgelöst. Bei *Polynomen* erster Ordnung ist dies sehr einfach.

Polynom 2ter Ordnung:

Bei Polynomen 2ter Ordnung gibt es folgende Möglichkeiten die Nullstellen zu ermitteln:

- Das Polynom liegt in der Form $f(x) = (x + a)(x + b)$ vor oder kann in eine solche Form umgewandelt werden (a und b sind Konstanten). In diesem Fall können die Nullstellen direkt als $-a$ und $-b$ abgelesen werden.

Beispiel:

Finde die Nullstellen der folgenden Funktion:

$$y = x^2 + 2x + 1$$

Diese Funktion kann auch geschrieben werden als

$$Y = (x + 1)(x + 1)$$

-1 ist also eine doppelte Nullstelle.

Polynome vom Grad >2.

Bei Polynomen vom Grad > 2 können die Nullstellen durch Näherungsverfahren ermittelt werden. Hierzu werden zwei X-Werte gewählt, zwischen denen eine Nullstelle vermutet wird und die zugehörigen Y-Werte ermittelt. Ist einer der Y-Werte positiv und einer negativ, so liegt dazwischen mindestens eine Nullstelle und man wählt den nächsten X-Wert zwischen den beiden ersten.

Beispiel:

Um die erste Nullstelle der Funktion $y = x^3 + 2x - 3$ mit dem Näherungsverfahren zu finden, werden zunächst zwei beliebige X-Werte gewählt und die entsprechenden Y-Werte ermittelt.

Ich wähle $x_1 = -2$und $x_2 = 2$. Daraus ergibt sich $y_1 = -15$ und $y_2 = 9$. Da die Funktion von positiv ins Negative wechselt und zwischen -2 und 2 vollständig definiert ist, muss dazwischen eine Nullstelle liegen.

Ich wähle als nächstes $x_3 = 0$ und erhalte $y_3 = -3$. Die Nullstelle liegt also zwischen 0 und 2. Ich wähle $x_4 = 1$ und erhalte die erste Nullstelle. Natürlich ist es möglich, dass bei anderen Funktionen wesentlich mehr Iterationsschritte benötigt werden, es ist aber sehr unwahrscheinlich, dass Dir eine solche Aufgabe in der Klausur gestellt wird.

Tipp: Es ist oft möglich und durchaus eine anerkannte Methode, Nullstellen zu raten! Um Zeit zu sparen sollten aber nur die je nach Funktion naheliegenden versucht werden (Zum Beispiel -2 bis $+2$). Oft kann man aus der Funktion in etwa abschätzen, wo eine Nullstelle liegen kann. Zur Übung empfehle ich wieder verschiedene Funktionen in Matheass graphisch darzustellen.

Oft kann man die erste Nullstelle auch ablesen (Hat die Funktion kein Absolutglied, so ist die Null immer eine Nullstelle).

Ist von einem Polynom die erste Nullstelle gefunden, so kann das Polynom vereinfacht werden, indem man es durch ($x -$ „Nullstelle“) teilt. Dabei verändert sich natürlich das Polynom, die

Nullstellen bleiben aber dieselben. Dies ist leicht zu erkennen, wenn man ein beliebiges Polynom mit ($x -$ „Nullstelle“) erweitert: $\frac{„Polynom“}{(x-"Nullstelle")} * (x - "Nullstelle")$. Ist die Nullstelle des 2ten Terms gefunden, so muss jetzt noch die Nullstelle des ersten Terms gefunden werden.

Achtung: Diese Zerlegung ist nicht immer einfach. Sollte Dir in einer Klausuraufgabe die Zerlegung nicht gelingen, so kannst du auch weitere Nullstellen durch Näherungsverfahren bestimmen.

Beispiel:

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 4$

Hat man durch Näherungsverfahren oder Raten die erste Nullstelle mit $x = 2$ gefunden, so teilt man das Polynom durch $(x - 2)$.

Nun kann man das Polynom auch folgendermaßen schreiben:

$f(x) = (x^2 - 2)(x - 2)$

und muss nur noch die Nullstelle der Funktion (x^2-2) bestimmen.

Versuche also bei Polynomen vom Grad > 2 immer das Polynom als Produkt seiner Linearfaktoren zu schreiben.

4.2. Die Ableitung einer Funktion

Schwerpunkt dieses Kapitels ist die Ermittlung der Steigung einer Funktion - der sogenannten Ableitung ($f'(x)$). Lineare Funktionen haben eine konstante Steigung, bei nicht-linearen Funktionen ändert sich die Steigung mit verschiedenen x-Werten.

Um die Steigung einer Funktion an einer bestimmten Stelle zu ermitteln, muss sie an dieser Stelle differenzierbar sein.

Differenzierbarkeit: Die Steigung in einem Punkt kann nur ermittelt werden, wenn die Funktion in diesem Punkt differenzierbar ist. Differenzierbar ist eine Funktion an der Stelle x_0, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existiert.

(Δx steht für eine beliebig kleine Änderung in *x*.)

Dieser Grenzwert existiert zum Beispiel nicht an den Rändern des Definitionsbereiches, da $f(x_0 + \Delta x)$ am rechten Rand des Definitionsbereiches für positive x außerhalb des Definitionsbereiches liegen würde.

Zur Ermittlung der Ableitung aus der Funktion gibt es folgende **Ableitungsregeln**:

1) Konstantenregel: Eine Konstante ist eine zur x-Achse parallele Gerade und hat daher die Steigung Null.

Man schreibt:

$f(x) = a$

$f'(x) = 0$

Beispiel:

$f(x) = 3$

$f'(x) = 0$

2) Potenzregel:

$f(x) = x^n$

$f'(x) = n * x^{n-1}$

Die Ableitung hat also immer eine um 1 geringere Potenz als ihre Stammfunktion.

Beispiel:

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

3) Summen- und Differenzenregel:

$f(x) = g(x) + h(x)$

$f'(x) = g'(x) + h'(x)$

Beispiel:

$$f(x) = x + 2$$

Die Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ sind folgende:

$$g(x) = x$$

$$h(x) = 2$$

Die Ableitungen sind:

$$g'(x) = 1$$

$$h'(x) = 0$$

Daraus folgt:

$$f'(x) = 1$$

Dies ist wirklich simpel. Bei Summen und Differenzen werden die Terme einzeln abgeleitet.

4) Produktregel:

$f(x) = g(x) * h(x)$

$f'(x) = g'(x) * h(x) + g(x) * h'(x)$

Beispiel:

$f(x) = x * \sin x$

Hier ist $g(x) = x$ und $h(x) = sin\, x$.

Man bildet zunächst die einzelnen Ableitungen:

$$g'(x) = 1$$

$h'(x) = \cos x$ (Die Ableitung von $sin\, x$ ist $cos\, x$. Diese speziellen Ableitungen findest du weiter unten)

$f'(x) = 1 * \sin x + x * \cos x$

5) Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

$$f'(x) = \frac{g'(x) * h(x) - g(x) * h'(x)}{(h(x))^2}$$

Beispiel:

$$f(x) = \frac{x}{\sin x}$$

Hier ist wieder $g(x) = x$ und $h(x) = sin\, x$.

$$g'(x) = 1$$

$$h'(x) = \cos x$$

$$f'(x) = \frac{1 * \sin x - x * \cos x}{sin^2 x}$$

6) Kettenregel:

$f(x) = g\big(h(x)\big)$

$f'(x) = h'(x) * g'\big(h(x)\big)$

Der Term $g(h(x))$ beschreibt eine Funktion von einer Funktion. Man spricht auch von der inneren und der äußeren Funktion, sowie von der inneren und äußeren Ableitung.

Beispiel:

$f(x) = \sin x^2$

Hier ist

$g(x) = \sin(h(x))$ (Dies ist Sinus von $h(x)$)

$h(x) = x^2$

Die Ableitungen sind:

$g'(x) = \cos(h(x))$ (Kosinus von $h(x)$)

$h'(x) = 2x$

$f'(x) = 2x * \cos x^2$

Merke Dir: „Innere Ableitung mal äußere Ableitung“. Die Schwierigkeit bei den Ableitungsregeln 4-6 ist es, die Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ zu identifizieren. Sobald du ein Produkt, einen Quotienten oder eine Funktion siehst, denke an die entsprechenden Ableitungsregeln. Mit etwas Übung wirst du die Funktionen leicht erkennen, daher ist es wichtig, dass du alle Übungsaufgaben sorgfältig durcharbeitest.

Hier einige wichtige Ableitungen, die du auswendig lernen musst:

$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{cos^2 x}$
$f(x) = \cot x$	$f'(x) = \frac{-1}{sin^2 x}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = log_a\, x$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{1}{x ln\, a}$

$f(x) = e^x$ $\qquad$ $f'(x) = e^x$

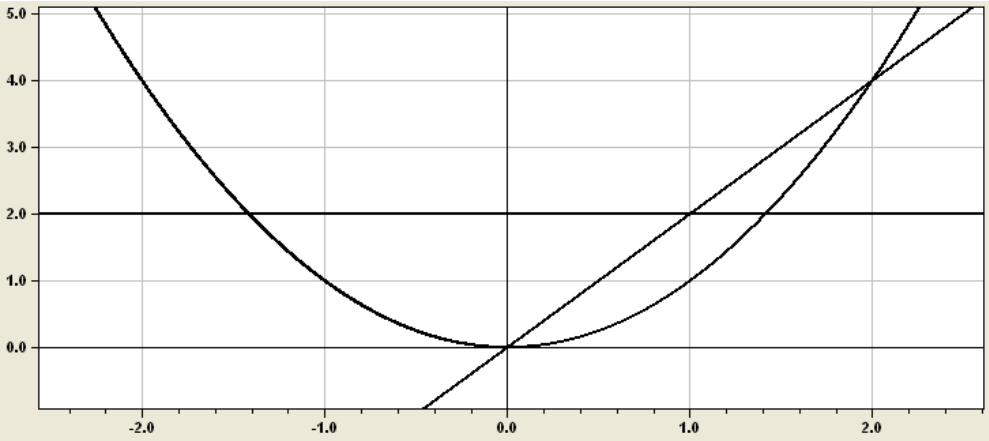
Die Ableitung einer Funktion wieder eine Funktion ist, kann man auch von der Ableitung wieder die Ableitung bilden (man schreibt $f''(x)$ für die 2te Ableitung, $f'''(x)$ für die 3te usw.). Die sogenannte zweite Ableitung misst die Steigung der ersten Ableitung und damit die Krümmung der Originalfunktion. Ist die zweite Ableitung positiv, so bedeutet das, dass die Steigung der Funktion ansteigend ist.

Dies ist gut an einem **Beispiel** zu erkennen.

Die Funktion $f(x) = x^2$ hat die Ableitungen:

$f'(x) = 2x$

$f''(x) = 2$



$f(x) = x^2$ ist eine Parabel, die für $x < 0$ eine negative Steigung hat und für $x > 0$ eine positive. Daher ist die erste Ableitung für $x < 0$ negativ und für $x > 0$ positiv. Die Steigung von $f(x)$ nimmt über alle x zu, die Steigung der ersten Ableitung ist daher durchgehend positiv und $f(x)$ weist eine positive Krümmung auf (sie ist konvex).

Übungsaufgaben zu 4.2

Aufgabe 4.2.1

Bilde die Ableitung der folgenden Funktionen:

1) $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$

2) $f(x) = 2x - \sin x$

3) $f(x) = \frac{1}{x} + 3x^5 - 2$

4) $f(x) = \sin(2x^3 - 3x)$

5) $f(x) = (x + 2)^2$

6) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$

7) $f(x) = \sin x^2$

8) $f(x) = \cos e^x$

9) $f(x) = x^3 * \sin x$

10) $f(x) = x^3 * \sin x^2$

11) $f(x) = 2x * \ln x$

12) $f(x) = \ln \sqrt{x}$

13) $f(x) = e^{3-x}$

14) $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+2}$

Lösungen zu 4.2

Lösung zu 4.2.1

1) $f'(x) = 4x + 3$

2) $f'(x) = 2 - \cos x$

3) Diese Funktion kann man auch anders schreiben und so auf die Quotientenregel verzichten:

$$f(x) = x^{-1} + 3x^5 - 2$$

Die Ableitung wird dann nach den Regeln 1-3 berechnet.

$$f'(x) = -1 * x^{-2} + 15x^4$$

4) Verwendung der Kettenregel: Man identifiziert die folgenden Funktionen:

$$g(x) = \sin(h(x))$$

$$h(x) = 2x^3 - 3x$$

$$g'(x) = \cos\big(h(x)\big)$$

$$h'(x) = 6x^2 - 3$$

Einsetzen in die Formel der Kettenregel ergibt:

$f'(x) = (\cos(2x^3 - 3x)) * (6x^2 - 3)$

5) Hier kann man ausmultiplizieren oder die Kettenregel nutzen.

Ausmultiplizieren und dann nach Regeln 1-3 ableiten ist einfacher. Für die Kettenregel musst du folgende Funktionen identifizieren:

$$g(x) = (h(x))^2$$

$$h(x) = x + 2$$

Daraus folgt:

$$f'(x) = 2x + 4$$

6) Nutzung der Kettenregel.

$$g(x) = \sqrt{h(x)}$$

$$h(x) = x^2 + 2$$

$g(x)$läßt sich auch schreiben als:

$$g(x) = \big(h(x)\big)^{\frac{1}{2}}$$

Nun kannst du nach Regeln 1-3 ableiten.

$$g'(x) = \frac{1}{2}(h(x))^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{h(x)}}$$

Daraus ergibt sich:

$f'(x) = \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} * 2x$

7) Nutzung der Kettenregel:

$$g(x) = \sin(h(x))$$

$$h(x) = x^2$$

$f'(x) = \cos x^2 * 2x$

8) Nutzung der Kettenregel:

$$g(x) = \cos\big(h(x)\big)$$

$$h(x) = e^x$$

Die Ableitung von e^xist e^x(siehe oben).

$f'(x) = -\sin e^x * e^x$ (Kettenregel)

9) Anwendung der Produktregel:

$$g(x) = x^3$$

$$h(x) = \sin x$$

Die Ableitungen musst du in die Formel der Produktregel einsetzen.

$f'(x) = 3x^2 * \sin x + x^3 * \cos x$

10) Hier ist eine Kombination aus Kettenregel und Produktregel gefragt:

Die Aufgabe ist der Aufgabe 9) sehr ähnlich, nur dass die Ableitung von $h(x) = \sin x^2$ nach der Kettenregel erfolgen muss.

Insgesamt werden folgende Funktionen identifiziert:

$$g(x) = x^3$$

$$h(x) = \sin x^2$$

Für die Anwendung der Kettenregel (Ich nutze die Indizierung K für die Funktionen der Kettenregel):

$$g_K(x) = \sin(h_K(x))$$

$$h_K(x) = x^2$$

Daraus folgt:

$$h'(x) = \cos x^2 * 2x$$

$$g'(x) = 3x^2$$

Einsetzen in die Produktregel:

$$f'(x) = 3x^2 * \sin x^2 + 2x * x^3 * \cos x^2$$

11) Nutzung der Produktregel:

$$g(x) = 2x$$

$$h(x) = \ln x$$

Die Ableitung von $\ln x$ ist $\frac{1}{x}$ (siehe oben)

$$f'(x) = 2 * \ln x + 2x * \frac{1}{x} = 2 * \ln x + 2$$

12) Anwendung der Kettenregel:

$$g(x) = \ln\big(h(x)\big)$$

$$h(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{h(x)}$$

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} * \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$$

13) Verwendung der Kettenregel:

$$g(x) = e^{h(x)}$$

$$h(x) = 3 - x$$

Die Ableitungen müssen in die Formel der Kettenregel eingesetzt werden.

$$f'(x) = f(x) = e^{3-x} * (-1) = -e^{3-x}$$

14) Verwendung der Quotientenregel:

$$g(x) = x^2 - 2$$

$$h(x) = x^2 + 2$$

Die Ableitungen müssen in die Formel der Quotientenregel eingesetzt werden.

$$f'(x) = \frac{2x * (x^2 + 2) - 2x * (x^2 - 2)}{(x^2 + 2)^2}$$

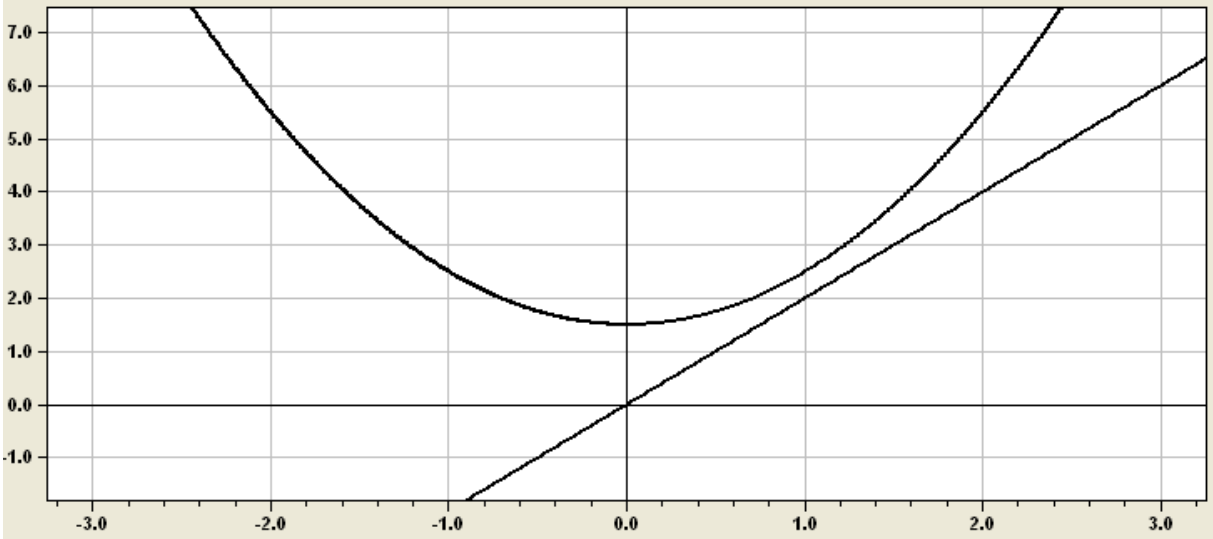
4.3. Extremstellen

Extremstellen sind Stellen, an denen der Funktionsgraph Hochpunkte oder Tiefpunkte markiert. An diesen Stellen ist die Steigung $= 0$ und damit ist der Wert der ersten Ableitung an dieser Stelle $= 0$.

Hier ein Funktionsgraph dazu:

$$f(x) = x^2 + \frac{3}{2}$$

$$f'(x) = 2x$$



Es gibt aber auch Stellen, an denen die Funktion eine Steigung von Null hat, ohne einen Hoch- oder Tiefpunkt zu haben. Die Funktion steigt, bewegt sich kurz - nur in einem Punkt - seitwärts und steigt dann wieder - das nennt man einen Sattelpunkt.

Bei einem Sattelpunkt ist die $f(x)$ zunächst positiv (negativ), nähert sich der Null, bildet einen Tiefpunkt (Hochpunkt) bei Null und wird dann wieder positiv (negativ).

Um zu prüfen, ob $f'(x)$ eine Extremstelle hat, wird $f''(x)$ genutzt. Ist $f''(x) \neq 0$, so liegt keine Extremstelle in $f'(x)$ vor und somit eine Extremstelle in $f(x)$.

Hier die grafische Darstellung einer Sattelstelle und der ersten beiden Ableitungen:

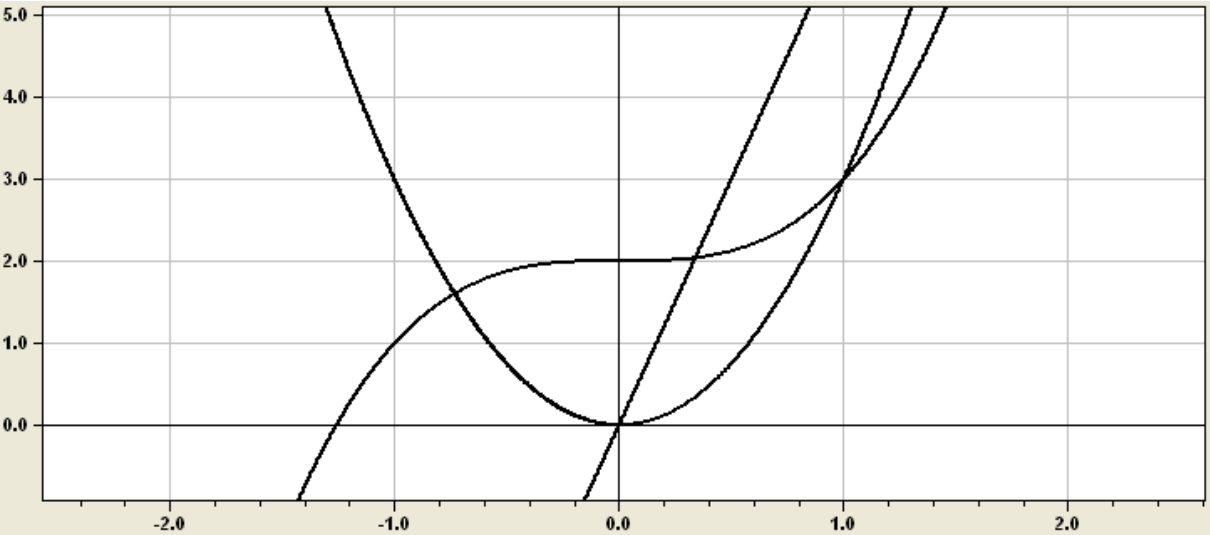
Dargestellt ist die Funktion

$$f(x) = x^3 + 2$$

Mit ihren Ableitungen:

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x$$



$f(x)$ hat bei $x = 0$ einen Sattelpunkt, aber keinen Hoch- oder Tiefpunkt. Die Steigung (die Parabel) ist zwar bei $x = 0$ auch gleich Null, aber wechselt ihr Vorzeichen nicht. Dies beweist die zweite Ableitung (die Gerade), die an dieser Stelle $= 0$ ist.

Zusammengefasst:

Wenn $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0\ und\ f'''(x) \neq 0$, dann Sattelpunkt.

Wenn $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$, dann Extremstelle.

Ob es sich um einen Hochpunkt oder einen Tiefpunkt handelt, kann auch anhand der zweiten Ableitung bestimmt werden. Es gilt:

Wenn $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$, dann Tiefpunkt

Wenn $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$, dann Hochpunkt

Es wird weiter zwischen lokalen und globalen Extremstellen unterschieden. Jeder Hoch- oder Tiefpunkt ist ein lokales Maximum (Minimum). Das globale Maximum (Minimum) ist der größte (kleinste) Wert, der erreicht wird. Dies kann ein lokaler Hochpunkt (Tiefpunkt) sein, es kann aber auch sein, dass die Funktion kein globales Maximum (Minimum) besitzt.

Ein globales Maximum kann auch an den Randstellen des Definitionsbereichs auftreten.

Übungsaufgaben zu 4.3

Aufgabe 4.3.1

Berechne die Extremstellen der folgenden Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 10x + 1$$

Aufgabe 4.3.2

Berechne die Extremstellen der folgenden Funktion:

$$f(x) = -x^3 + 3x + 4$$

Aufgabe 4.3.3

Bestimme für folgende Preis-Absatz-Funktion das x, für das der Umsatz maximal wird (X ist die Anzahl an verkauften Gütern).

$$p(x) = 2 - \frac{1}{2}x$$

Aufgabe 4.3.4

Es liegt folgende Kostenfunktion für die variablen Kosten vor:

$$K(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Die Fixkosten betragen 8.

Der Verkaufspreis des Gutes beträgt 5.

Bestimme die Gewinnfunktion, die Gewinnschwelle und die Verkaufsmenge, für die der Gewinn maximal wird.

Lösungen zu 4.3

Lösung zu 4.3.1

Zunächst bilden wir die ersten zwei Ableitungen:

$$f'(x) = x - 10$$

$$f''(x) = 1$$

Die Nullstelle der ersten Ableitung ist $x = 10$.

Da die zweite Ableitung durchgehend positiv ist, handelt es sich um einen Tiefpunkt.

Lösung zu 4.3.2

$$f'(x) = -3x^2 + 3$$

$$f''(x) = -6x$$

Die erste Ableitung hat eine Nullstelle bei $x = 1$ und eine bei $x = -1$.

Die zweite Ableitung nimmt an diesen Stellen folgende Werte an:

$$f''(-1) = 6$$

$$f''(1) = -6$$

Damit hat die Funktion einen Tiefpunkt bei $x = -1$ und einen Hochpunkt bei $x = 1$.

Lösung zu 4.3.3

Der Umsatz ergibt sich aus Preis $*$ Menge

$$p(x) * x = U(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$$

Gesucht ist der Hochpunkt dieser Funktion.

$$U'(x) = -x + 2$$

$$U''(x) = -1$$

Die Nullstelle von U' ist 2. Da U'' für $x = 2$ negativ ist, hat die Umsatzfunktion an dieser Stelle einen Hochpunkt.

Lösung zu 4.3.4

Die Gesamtkostenfunktion lautet:

$$Gk(x) = \frac{1}{2}x^2 + 8$$

Die Gewinnfunktion ergibt sich aus der Differenz aus Erlös und Kosten:

$$G(x) = 5x - \frac{1}{2}x^2 - 8$$

Gesucht ist die Nullstelle und der Hochpunkt dieser Funktion.

$$5x - \frac{1}{2}x^2 - 8 = 0$$

Die erste Nullstelle läßt sich mit $x = 2$ direkt ablesen. Die zweite kann durch Polynomdivision ermittelt werden oder mit etwas Probieren auch direkt mit $x = 8$ geraten werden.

Es gibt demnach zwei Gewinnschwellen. Es bleibt noch zu klären, bei welcher Nullstelle der Gewinn vom Negativen ins Positive wechselt und bei welcher vom Positiven ins Negative.

Mit Hilfe der ersten Ableitung läßt sich die Steigung an den Nullstellen und das Extremum bestimmen.

$$G'(x) = -x + 5$$

Für $x = 2$ ist die erste Ableitung also positiv. Ist die Steigung positiv, so wechselt der Gewinn vom Negativen ins Positive. Für $x = 8$ ist die Steigung negativ, der Gewinn wechselt also vom Positiven ins Negative.

Für $x = 5$ hat die Funktion eine Nullstelle. Mit Hilfe der zweiten Ableitung kann bestimmt werden, ob es sich um einen Hochpunkt handelt.

$$G''(x) = -1$$

Somit hat die Funktion bei $x = 5$ einen Hochpunkt.

4.4. Gebrochenrationale Funktionen

Gebrochenrationale Funktionen bestehen aus einem Quotienten zweier Polynome.

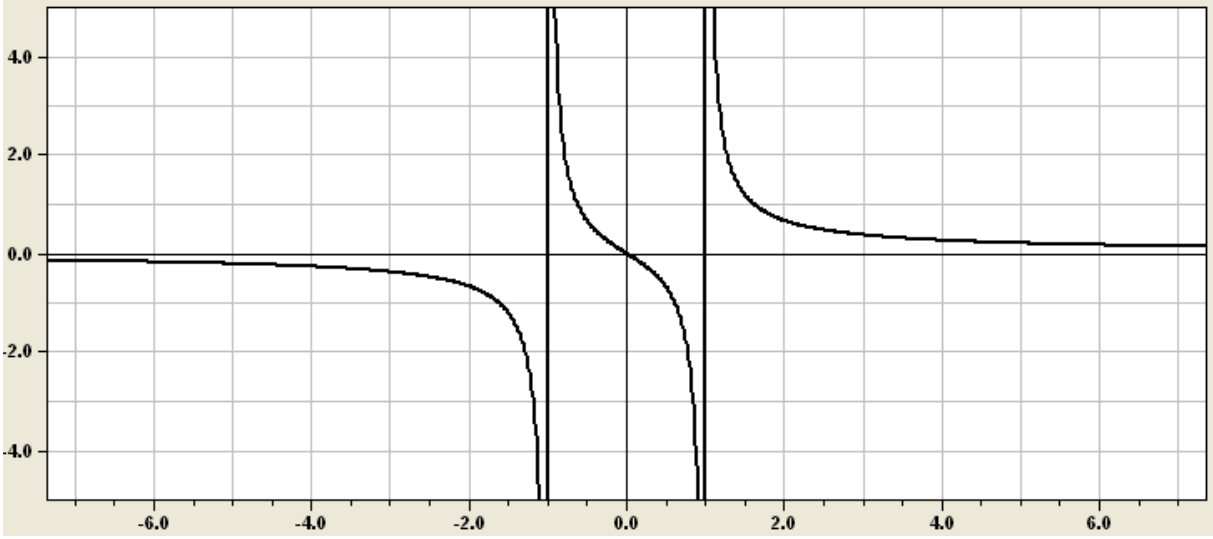
Diese Funktionen haben folgende Charakteristika bezüglich ihrer Nullstellen. Da die Funktion für Nullstellen des Nenners nicht definiert ist, hat die Funktion hier Definitionslücken. Haben Zähler und Nenner dieselbe Nullstelle, so kann der entsprechende Linearfaktor ($x -$ Nullstelle) gekürzt werden und damit die entsprechenden Definitionslücken behoben werden, ohne dass sich die Funktion ansonsten verändert.

Die (alleinigen) Nullstellen des Zählers sind auch die Nullstellen der Funktion. Obwohl die Funktion für Nullstellen des Nenners nicht definiert ist, können die Werte nahe der Nullstelle untersucht werden. Sehr nahe an der Nullstelle des Nenners nimmt die Funktion sehr große positive bzw. sehr große negative Werte an. Diese Stellen nennt man Polstellen.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$x = 1$ ist eine behebbare Definitionslücke, da Zähler und Nenner bei $x = 1$ eine Nullstelle haben. Bei $x = -1$ liegt dagegen eine Polstelle. Nähert man sich $x = -1$ von oben, also wählt z.B. $x = -1{,}0001$, so ergibt sich mit $y = 10001$ ein sehr großer Wert. Nähert man sich $x = -1$ von unten, wählt also $x = -0{,}9999$, so ergibt sich mit $y = -9999$ ein sehr großer negativer Wert. Graphisch läßt sich die Funktion so verdeutlichen:



Übungsaufgaben zu 4.4

Aufgabe 4.4.1

Bestimme die Definitionsmenge, die Polstellen, die Nullstellen und behebbaren Definitionslücken der folgenden Funktion

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

Aufgabe 4.4.2

Bestimme die Definitionsmenge, die Polstellen, die Nullstellen und behebbaren Definitionslücken der folgenden Funktion

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$$

Lösungen zu 4.4

Lösung zu 4.4.1

Definitionsmenge: Die Funktion hat eine Definitionslücke bei $x = -1$. Ansonsten ist die Funktion über alle reellen Zahlen definiert.

Polstellen: Da die Definitionslücke nicht behebbar ist, handelt es sich bei $x = -1$ um eine Polstelle.

Die Nullstellen der Funktion sind die Nullstellen des Zählers. Dieser hat eine Nullstelle bei $x = 1$.

Lösung zu 4.4.2

Definitionsmenge: Die Funktion hat eine Definitionslücke bei $x = 2$ und bei $x = -2$. Ansonsten ist die Funktion über alle reellen Zahlen definiert.

Polstellen: Da die Definitionslücke nicht behebbar ist, handelt es sich bei $x = -2$ und $x = 2$ um Polstellen.

Nullstellen: Da der Zähler eine doppelte Nullstelle bei $x = 0$ besitzt, hat die Funktion dort zwei Nullstellen.

4.5 Monotonieverhalten

Das Monotonieverhalten einer Funktion lässt sich an wenigen Merkmalen ihrer ersten Ableitung feststellen:

1) Ist die erste Ableitung durchgehend positiv (negativ), so ist die Funktion streng monoton steigend (fallend).

2) Ist die erste Ableitung durchgehend positiv (negativ) oder $= 0$, so ist die Funktion monoton steigend (fallen). Sie ist nicht streng monoton, weil auch Steigungen von Null enthalten sind.

3) Die Funktion ist konstant und parallel zur X-Achse, wenn ihre erste Ableitung durchgehend Null ist.

Übungsaufgaben zu 4.5

Aufgabe 4.5.1

Verlaufen die folgenden Funktionen über ihre Definitionsmenge monoton? Wenn ja, fallend oder steigend? Gib weiter an, ob die Monotonie streng ist oder nicht.

1) $f(x) = \sin x$

2) $f(x) = ln\, x$

3) $f(x) = e^x$

4) $f(x) = x^2$

5) $f(x) = |x|$

Lösungen zu 4.5

Lösung zu 4.5.1

1) nicht monoton

2) streng monoton steigend

3) streng monoton steigend

4) nicht monoton

5) nicht monoton

4.6 Grenzwertbestimmung

In einigen Fällen ist die Grenzwertbestimmung nicht aussagefähig. Wenn z.B. folgende Ausdrücke entstehen:

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$0 * \infty$$

In diesen Fällen muss geprüft werden, welcher der Terme schneller gegen seinen Grenzwert streben. Für den Fall

$$\frac{0}{0}$$

würde sich zum Beispiel ein sinnvoller Ausdruck ergeben, wenn der Zähler schneller gegen Null strebt als der Nenner. Hierzu müssen die Ableitungen der beiden Terme verglichen werden.

Regel von L'Hospital:

Es gilt: $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Sollte auch der Grenzwert der Ableitungen keine Aussagekraft haben, so kann die Regel beliebig oft wiederholt werden.

Beispiel:

Den Grenzwert des Terms $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$ bestimmt man nach der Regel von L'Hospital:

Da sich für $x = 0$ der Term $\frac{0}{0}$ ergibt, vergleicht man die Ableitungen der Zähler- und Nennerfunktion

$$f(x) = e^x - 1$$

$$g(x) = \sin x$$

$$f'(x) = e^x$$

$$g'(x) = \cos x$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$$

Übungsaufgaben zu 4.6

Das Schema ist immer dasselbe. Ergibt sich ein nichts aussagender Ausdruck, wie $0/0$ oder $0 * \infty$, so bildest du die Ableitungen, bis du einen Grenzwert ermitteln kannst.

Aufgabe 4.6.1

Ermittle den Grenzwert zu folgenden Funktionen:

1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{e^x}$

4) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{ln\, x}{x^3}$

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^n}{e^x}$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$

7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

8) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{\sin(x - 2)}$

Lösungen zu 4.6

Lösung zu 4.6.1

Es werden jeweils die Quotienten aus den Ableitungen des Zählers und des Nenners gebildet.

1) $\lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1} = \frac{1}{x} = 1$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$

3) $\lim_{x\to \infty} \frac{1}{e^x} = 0$

4) $\lim_{x\to \infty} \frac{1/x}{3x^2} = 0$

5) $\lim_{x\to \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x}$

Für diesen Term müßte man die Regel von L'Hospital n-mal wiederholen, um auf den folgenden Ausdruck zu kommen.

$\lim_{x\to \infty} \frac{n!\, x^{n-n}}{e^x}$

n! steht für $n * (n-1) * (n-2) * \ldots * 1$

Dieser Ausdruck strebt gegen 0.

6) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$

7) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x}$

Erneutes Ableiten von Zähler und Nenner:

$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$

8) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{\cos(x-2)} = 1$

4.7. Die systematische Kurvendiskussion

Bei einer Kurvendiskussion werden die markanten Punkte der Funktion (Extremstellen, Wendepunkte, Nullstelle, usw.) ermittelt und der Verlauf zwischen diesen Punkten charakterisiert.

Dazu gehören die folgenden Punkte:

1) Festlegung des Definitionsbereichs der Funktion

2) Festlegung des Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbereiches

3) Bestimmung der ersten 3 Ableitungen der Funktion

4) Untersuchung der Ränder des Definitionsbereichs. Dazu gehören die äußeren Ränder, aber auch mögliche Definitionslücken.

5) Bestimmung der Nullstellen

6) Bestimmung der Extremstellen und der zugehörigen Extrema (Y-Werte)

7) Bestimmung der Wendestellen und der zugehörigen Wendepunkte (Y-Werte)

8) Untersuchung des Monotonieverhaltens

9) Untersuchung des Krümmungsverhaltens

10) Berechnung spezieller Funktionswerte

11) Zeichnen des Funktionsgraphens

1) Festlegung des Definitionsbereichs der Funktion

Du musst prüfen, für welche X-Werte die Funktion definiert ist. Die häufigsten Ursachen für eingeschränkte Definitionsbereiche und Definitionslücken sind:

- Gerade Wurzeln sind nicht für negative Zahlen definiert.

- Die Logarithmusfunktion ist nicht für negative Zahlen definiert.

- Teilen durch Null: Steht x im Nenner, so besteht bei $x = 0$ eine Definitionslücke. Bei gebrochenrationalen Funktionen muss überprüft werden, ob Nenner und Zähler dieselben Nullstellen haben, dann ist es eine behebbare Definitionslücke. Ansonsten ist es eine Polstelle.

2) Festlegung des Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbereichs

Hierzu musst du dir nur 2 Sätze merken, die du dann in der Klausur entsprechend wiedergibst:

- Jedes Polynom ist differenzierbar über ganz *R.*

- Jede gebrochen rationale Funktion ist differenzierbar über ihrem Definitionsbereich.

3) Die **Bestimmung der Ableitungen** erfolgt gemäß den Regeln aus 3.1.

4) Bei der **Bestimmung der Grenzwerte** solltest du für x die Grenzen des Definitionsbereiches einsetzen. Liegt eine Polstelle vor, so setzt du einmal einen minimal kleineren und einmal einen minimal größeren Werte ein, um so herauszufinden, ob die Funktion gegen +∞ oder -∞ strebt.

Bei gebrochenrationalen Funktionen, bei denen x im Zähler als auch im Nenner vorkommt, kann die Grenzwertbetrachtung etwas komplexer werden. Um den Grenzwert zu ermitteln, sollte die Funktion vereinfacht werden.

Hierzu gibt es folgende Rechenregeln:

1) $\lim_{x\to\infty}\big(c * f(x)\big) = c * \lim_{x\to\infty} f(x)$

2) $\lim_{x\to\infty}\big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x)$

3) $\lim_{x\to\infty}(f(x) * g(x)) = \lim_{x\to\infty} f(x) * \lim_{x\to\infty} g(x)$

4) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to\infty} f(x)}{\lim_{x\to\infty} g(x)}$ für $g(x) \neq 0$

Ein weiterer Trick ist es, die Funktion mit der höchsten Potenz von x zu kürzen.

Beispiel:

$$\lim_{x\to\infty} = \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 - x}$$

Zunächst teilt man durch den höchsten gemeinsamen Grad von Zähler und Nenner: x^2

$$\lim_{x\to\infty} = \frac{3 + 2/x + 3/x^2}{1 - 1/x}$$
$$= \frac{3 + \lim_{x\to\infty} 2/x + \lim_{x\to\infty} 3/x^2}{1 - \lim_{x\to\infty} 1/x}$$
$$= \frac{3 + 0 + 0}{1 - 0} = 3$$

Oft wird auch der Grenzwert für $\lim_{x \to a}$ gesucht. X soll also nicht gegen ∞, sondern gegen eine konstante Zahl a streben.
Ist die Funktion für $x = a$ definiert, so kann man den Grenzwert direkt durch Einsetzen ermitteln. Sollte bei $x = a$ eine nicht behebbare Definitionslücke (eine Polstelle) bestehen, so kann man durch Einsetzen von Werten, die nur sehr gering von a abweichen, den Grenzwert näherungsweise ermitteln. Wichtig ist es hierbei, den rechtsseitigen Grenzwert (also x leicht größer als a) und den linksseitigen (also x leicht kleiner a) zu ermitteln.

5) Die **Ermittlung der Nullstellen** wurde in der Einführung Kapitel 3.1 behandelt. Bestimme immer die Nullstellen der Funktion und der ersten drei Ableitungen.

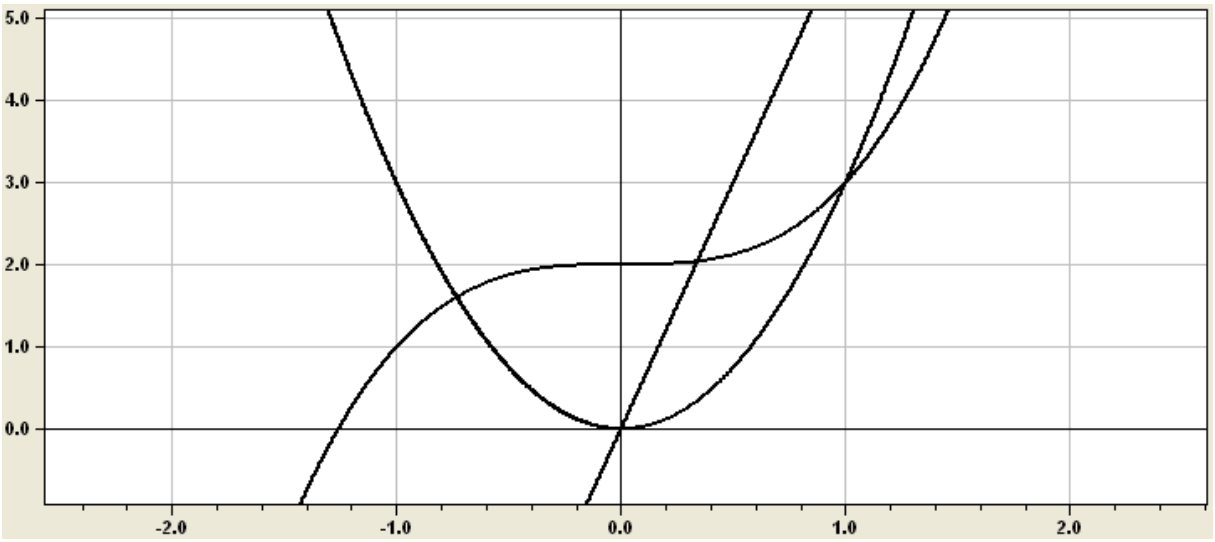
6) Bestimmung der Extremstellen und der zugehörigen Extrema (Y-Werten)

Extremstellen werden nach den Rechenregeln in 3.3 bestimmt. Die zugehörigen Extrema erhälst du, indem du die X-Werte der Extremstellen in die Funktion $f(x)$ einsetzt.

7) Bestimmung der Wendestellen und der zugehörigen Wendepunkte (Y-Werte)

An einem Wendepunkt ändert sich die Krümmung der Funktion. Zum Beispiel von steigender Steigung auf fallende Steigung. Die Grafik erleichtert hier das Verständnis:

Wir nehmen wieder das Bespiel aus 3.2. Wie in der Grafik zu sehen ist, nimmt die Steigung der Funktion für $x < 0$ stetig ab, bis sie ab dem Punkt $x = 0$ wieder zunimmt. Der Punkt $x = 0$ ist eine Wendestelle.



Mathematisch wird eine Wendestelle dadurch definiert, dass die zweite Ableitung (die Gerade) eine Nullstelle aufweist und die Dritte Ableitung keine Nullstelle aufweist.

Kurz: Wenn $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$, dann liegt an der Stelle x ein Wendepunkt vor.

8) Untersuchung des Monotonieverhaltens

Zur Bestimmung des Monotonieverhaltens musst du die lokalen Extrema und die Sattelstellen bestimmen. Zwischen einem Hoch- und einem Tiefpunkt ist die Funktion streng monoton fallend. Liegt dazwischen ein Sattelpunkt, so ist sie nur monoton fallend.

9) Untersuchung des Krümmungsverhaltens

Zur Bestimmung der Krümmung benötigst du die Nullstellen von $f''(x)$.

Es gilt:

-Wenn $f''(x) > 0$, dann ist die Funktion konvex (positive Krümmung)

10) Berechnung spezieller Funktionswerte

Um die Funktion besser zeichnen zu können, solltest du spezielle Funktionswerte, wie z.B. $x = 0$ berechnen. Bei komplexen Graphen solltest du 10-14 Werte berechnen, bei simplen Graphen reichen weniger.

11) Zeichnen des Funktionsgraphen

Achte darauf, dass du die ermittelten Punkte nicht mit geraden Linien verbindest, sondern mit geschwungenen Linien.

Übungsaufgaben zu 4.7

Aufgabe 4.7.1

Führe eine Kurvendiskussion für folgende Funktion durch:

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$$

Lösungen zu 4.7

Lösung zu 4.7.1

1) Festlegung des Definitionsbereichs der Funktion

Die Funktion ist für alle reellen Zahlen definiert.

2) Festlegung des Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbereichs

Jedes Polynom ist differenzierbar über ganz *R*.

3) Bestimmung der ersten 3 Ableitungen der Funktion

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$$

$$f''(x) = 36x^2 - 48x + 12$$

$$f'''(x) = 72x - 48$$

4) Untersuchung der Ränder des Definitionsbereichs

Da es keine Definitionslücken gibt, untersuchen wir die Funktion für sehr große positive und negative Werte von X.

$$\lim_{x\to\infty} 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 = \infty$$

5) Bestimmung der Nullstellen

Die ersten beiden Nullstellen lassen sich mit $x = 0$ ablesen.

Teilt man also zweimal durch $(x - 0)$, so erhält man den Term

$$3x^2 - 8x + 6$$

Diese Funktion besitzt keine weiteren Nullstellen da gilt:

$3x^2 + 6 > 8x \quad für\ alle\ x.$

6) Bestimmung der Extremstellen und der zugehörigen Extrema (Y-Werten)

Voraussetzung für ein Extremum ist die Nullstelle der Ableitung.

Die Funktion

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$$

hat offensichtlich bei $x = 1$ und $x = 0$ eine Nullstelle.

Wir teilen daher $f'(x)$ zunächst durch $x - 0$ und dann durch $x - 1$ und erhalten

$$12x - 12$$

und damit $x = 1$ als doppele Nullstelle.

Nun müssen wir überprüfen, ob es sich bei den Punkten auch wirklich um Extrema handelt oder eventuell um Sattelpunkte.

Zur Erinnerung: Bedingung für ein Extremum ist:

$f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

Wir untersuchen also $f''(x)$ an den Stellen $x = 0$ und $x = 1$.

$$f''(0) = 12$$

$$f''(1) = 0$$

Also hat $f(x)$bei $x = 0$ ein Extremum und bei $x = 1$ eine Sattelstelle.

7) Bestimmung der Wendestellen und der zugehörigen Wendepunkte (Y-Werte)

Die Wendepunkte der Funktion sind die Nullstellen der zweiten Ableitung.

$$f''(x) = 36x^2 - 48x + 12$$

$$36x^2 - 48x + 12 = 0$$

Wir können schnell $x = 1$ ablesen. Durch Polynomdivision des Polynoms durch $(x - 1)$ erhalten wir

$$36x - 12$$

und damit $x = \frac{1}{3}$ als zweite Nullstelle.

Die Funktion hat Wendepunkte bei $x = 1/3$ und $x = 1$.

Die dazugehörigen Y-Werte sind

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 0{,}41$$

$$f(1) = 1$$

8) Untersuchung des Monotonieverhaltens

Anhand der Nullstellen der ersten Ableitung können wir über die Monotonie der Funktion $f(x)$ sagen:

$f(x)$ ist streng monoton fallend für $-\infty \leq x < 0$

$f(x)$ ist monoton steigend für $0 \leq x \leq \infty$

Merke: Da $f(x)$ eine doppelte Nullstelle (also ohne Vorzeichenwechsel) hat, ist die Funktion nur monoton steigend und nicht streng monoton steigend.

9) Untersuchung des Krümmungsverhaltens

Anhand der Nullstellen der zweiten Ableitung können wir über die Monotonie der Funktion $f(x)$sagen:

$f(x)$ist positiv gekrümmt für $-\infty \leq x \leq \frac{1}{3}$

$f(x)$ist negativ gekrümmt für $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$

$f(x)$ist positiv gekrümmt für $1 \leq x \leq \infty$

10) Berechnung spezieller Funktionswerte

Da die Funktion für Werte von $-1 > x > 1$ sehr stark ansteigt, wählen wir Werte zwischen -1 und 2

$$f(-1) = 17$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2{,}7$$

$$f(0) = 0$$

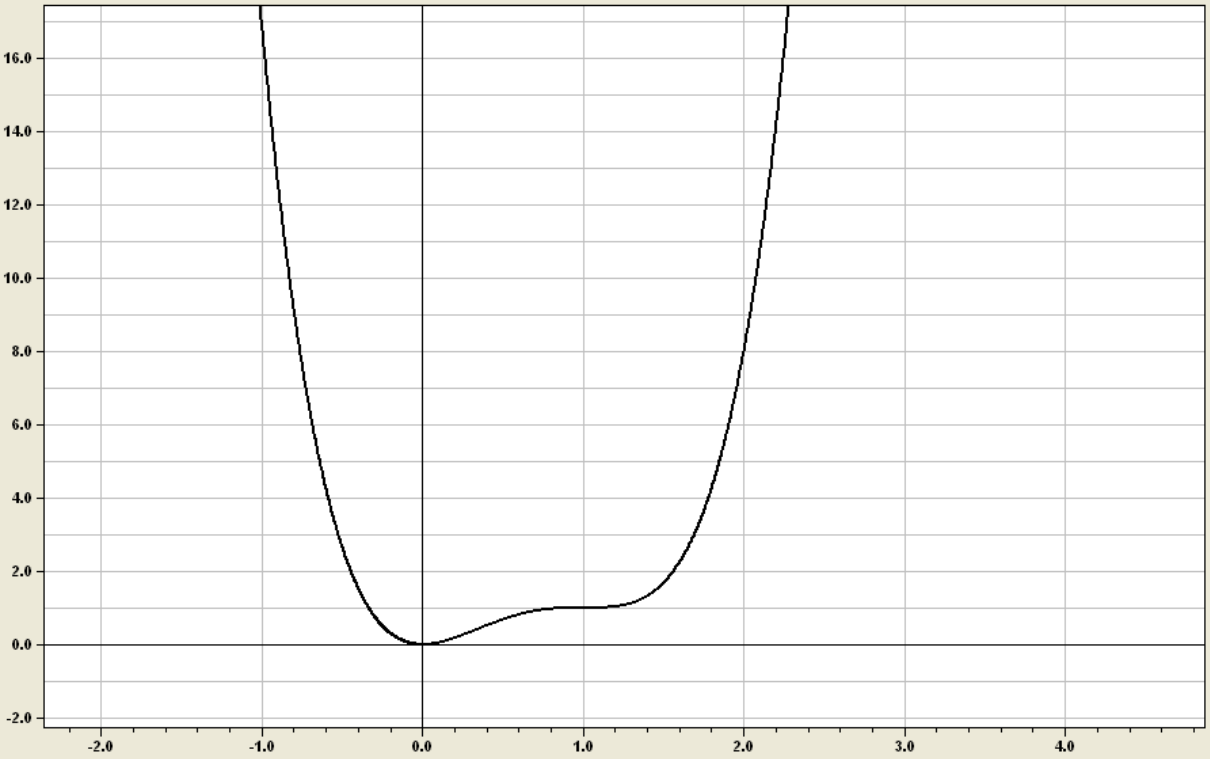
$$f(0{,}5) = 0{,}7$$

$$f(1) = 1$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 1{,}7$$

$$f(2) = 8$$

11) Zeichnen des Funktionsgraphen



5.1. Integralrechnung

Die Integralrechnung ist die Umkehroperation zu der Differentialrechnung. Das Integral einer Ableitung ist deren Stammfunktion.

Man schreibt

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Daher gilt auch

$$\int f'(x)dx = f(x)$$

Da aber mehrere verschiedene Funktionen dieselbe Ableitung haben, kann man zwar zu jeder Funktion eindeutig die Ableitung bestimmen, aber nicht eindeutig die Stammfunktion. Das liegt daran, dass die Ableitung einer Funktion nur Informationen über deren Steigung und nicht über ihre Lage im Koordinatensystem enthält.

Zum besseren Verständnis hier ein **Beispiel:**

Die Funktionen:

$$f(x) = x^2 + 2$$

$$f(x) = x^2 + 4$$

$$f(x) = x^2 - 3$$

haben alle die Ableitung

$$f'(x) = 2x$$

Die Stammfunktion zu

$$f(x) = 2x$$

ist also die Funktion

$$F(x) = x^2 + c$$

wobei c jede beliebige Zahl sein kann.

Als Umkehroperation der Ableitung ist die Rechenregel für die Integration:

$$\int ax^n dx = a\frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

Weitere wichtige Integrale sind:

$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$F(x) = \frac{1}{-n+1} x^{-n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$
$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$
$f(x) = e^{ax}$	$F(x) = \frac{e^{ax}}{a}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$

Es gelten weiter die

- Faktorregel:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

- Summen- und Differenzenregel:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

- Regel der partiellen Integration:

Sind die zu integrierenden Funktionen verkettet, so kann man oft die Regel der partiellen Integration anwenden:

$$\int f(x) * g(x)dx$$

Nun setzt man $f(x) = u$ und $g(x) = v'$

Es gilt dann:

$$\int u * v' = u * v - \int u' * v$$

Du musst also zunächst die beiden Funktionen erkennen und dann eine als u und eine als v‘ wählen. Natürlich solltest du als v‘ die Funktion wählen, zu der du die Stammfunktion leichter ermitteln kannst.

Beispiel: Berechne das Integral zu

$$f(x) = x * \sin x$$

Setze:

$$x = u$$

und

$$v' = \sin x$$

Daraus folgt dann

$$u' = 1$$

$$v = -\cos x$$

Und nach der Regel der partiellen Integration:

$$\int u * v' = u * v - \int u' * v$$

$$x * (-\cos x) - \int 1 * (-\cos x) dx$$

Da die Stammfunktion von $-\cos x$ bekannt ist, kann das Integral ermittelt werden zu:

$$x * (-\cos x) - (-\sin x) + c$$

Substitutionsmethode

Ist eine Funktion in der Form

$$\int f\big(g(x)\big) g'(x) dx$$

gegeben, so kann die Substitutionsmethode angewendet werden. Dies ist die Umkehroperation zur Kettenregel bei der Differentialrechnung:

Zunächst substituiert man

$$g(x) = u$$

und berechnet dx. Da gilt

$$u' = \frac{du}{dx}$$

folgt

$$dx = \frac{du}{u'}$$

Jetzt setzt man dx in das Integral

$$\int f(u)\, u' dx$$

ein und erhält

$$\int f(u)\, u' \frac{1}{u'} du$$

Zu diesem Ausdruck kann nach bekannten Regeln das Integral ermittelt werden. Danach wird u wieder durch $g(x)$ zurücksubstituiert.

Beispiel: Berechne

$$\int \sin x^2\, 2x dx$$

Man muß zunächst erkennen, dass

$$f(x) = \sin x$$

$$g(x) = x^2$$

$$g'(x) = 2x$$

Somit kann die Substitutionsregel angewandt werden.

Setze $u = x^2$

Berechne dx:

$$u' = \frac{du}{dx} = 2x$$

Daraus folgt

$$dx = \frac{1}{2x} du$$

Eingesetzt in das Integral folgt

$$\int \sin u * u' \frac{1}{2x} du$$

Da gilt:

$$u' = \frac{du}{dx} = 2x$$

vereinfacht der Term zu

$$\int \sin u \ du = -\cos u + c$$

Substituiert man nun zurück, erhält man

$$-\cos x^2 + c$$

Sollte das Integral nicht in der Grundform vorliegen, so kann man es eventuell durch geschickte Faktormultiplikation in die gewünschte Form bringen.

Sollte die obige Aufgabe z.B. lauten:

$$\int \sin x^2 \, x dx$$

so kann man die fehlende 2 unter dem integral bekommen, indem man gemäß der Faktorregel das gesamte Integral mit $\frac{1}{2}$ multipliziert und dafür im Integral mit 2 multipliziert:

$$\frac{1}{2} \int \sin x^2 \, 2x dx$$

Diese Dinge solltest du etwas üben, da es neben den Rechenregeln darum geht, bestimmte Schemata zu erkennen und entsprechende Regeln und Tricks anzuwenden. Zum Glück wiederholen sich die Aufgabentypen regelmäßig und lassen sich gut einüben.

Übungsaufgaben zu 5.1

Aufgabe 5.1.1

Bestimme zu den folgenden Funktionen die Stammfunktionen:

1)$f(x) = 1$

2)$f(x) = x^2$

3)$f(x) = 5x^2 - 2x + 3$

4)$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$

5)$f(x) = 16x^4 + x - 3 + \frac{2}{x^2}$

Aufgabe 5.1.2

Bestimme zu den folgenden Funktionen die Stammfunktionen unter der Nutzung der partiellen Integration:

1)$f(x) = x * e^x$

2) $f(x) = x * \ln x$

Aufgabe 5.1.3

Bestimme zu den folgenden Funktionen die Stammfunktionen unter der Nutzung der Integration durch Substitution:

1)$f(x) = x * \sqrt{x^2 + 1}$

2)$f(x) = \frac{6x^2}{2x^3+1}$

Lösungen zu 5.1

Lösung zu Aufgabe 5.1.1

1)$F(x) = x$+c

2) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$

3) $F(x) = \frac{5}{3}x^3 - x^2 + 3x + c$

4) $F(x) = -2\sqrt{x} + c$

5) $F(x) = \frac{16}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{x} - 3x + c$

Lösung zu 5.1.2

1) $u = x$

$v' = e^x$

Daraus folgt:

$u' = 1$

$v = e^x$

Dann gilt nach der Regel der partiellen Integration:

$$\int u * v' = u * v - \int u' * v = x * e^x - \int 1 * e^x dx = x * e^x - e^x + c$$

2)

$$u = ln\, x$$

$$v' = x$$

$$u' = \frac{1}{x}$$

$$v = \frac{1}{2}x^2$$

$$\int u * v' = u * v - \int u' * v = \ln x * \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{x} * \frac{1}{2}x^2 dx = \ln x * \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^2 + c$$

Lösung zu 5.1.3

1) Gesucht ist $\int x * \sqrt{x^2+1} dx$

Setze $u = \sqrt{x^2+1}$

Dann folgt

$u' = \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} * (x^2+1)^{\frac{-1}{2}} * 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{u}$

Nach dx aufgelöst:

$$dx = \frac{u}{x} * du$$

Eingesetzt in die Ausganggleichung:

$$\int x * u * \frac{u}{x} * du = \int u^2 \, du = \frac{1}{3} u^3$$

Nun muss nur noch zurücksubstituiert werden:

$$F(x) = \frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3 + c$$

2) Gesucht ist $\int \frac{6x^2}{2x^3+1} dx$

Setze $u = 2x^3 + 1$

Dann folgt

$$u' = \frac{du}{dx} = 6x^2$$

Nach dx aufgelöst:

$$dx = \frac{1}{6x^2} * du$$

Eingesetzt in die Ausgangsgleichung:

$$\int \frac{6x^2}{u} \frac{1}{6x^2} * du = \int \frac{1}{u} * du = \ln u$$

Nun muss nur noch zurücksubstituiert werden:

$$F(x) = \ln(2x^3 + 1) + c$$

5.2. Flächenberechnungen mit Hilfe der Integralrechnung

Nachdem im letzten Kapitel die Berechnung der Stammfunktion behandelt wurde, soll nun die Verwendung dieser erläutert werden.

Die wichtigste Eigenschaft der Stammfunktion ist die, dass sie die Fläche zwischen $f(x)$ und der X-Achse angibt. Man sagt dazu auch das „bestimmte Integral“.

Für den Flächeninhalt, der zwischen der X-Achse und der Funktion im Bereich zwischen a und b $(b > a)$ eingeschlossen wird, scheiben wir:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Der Flächeninhalt beträgt dann

$$F(b) - F(a)$$

Man schreibt auch $[F(x)]_a^b$

Achtung: Für negative $f(x)$ Werte wird auch die eingeschlossene Fläche negativ. Um die betragliche Fläche zu ermitteln, muss man also immer zwischen den Nullstellen integrieren und die Beträge der Flächen dann summieren.

Beispiel: Die Fläche zwischen der X-Achse und der Funktion

$$f(x) = -x^2 + 4$$

im Intervall 1 und 4 berechnet man durch

$$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x + c$$

Nun muss geprüft werden, ob $f(x)$zwischen 1 und 4 Nullstellen hat.

Die Nullstellen lassen sich mit -2 und 2 schnell ablesen.

Wir berechnen daher zunächst die Fläche zwischen 1 und 2 und dann die zwischen 2 und 4.

$$\left|[F(x)]_1^2\right| + |[F(x)]_2^4|$$

$$= \left|\left(-\frac{1}{3}2^3 + 4 * 2\right) - \left(-\frac{1}{3}1^3 + 4 * 1\right)\right| + \left|\left(-\frac{1}{3}4^3 + 4 * 4\right) - \left(-\frac{1}{3}2^3 + 4 * 2\right)\right|$$

$$= 12{,}33$$

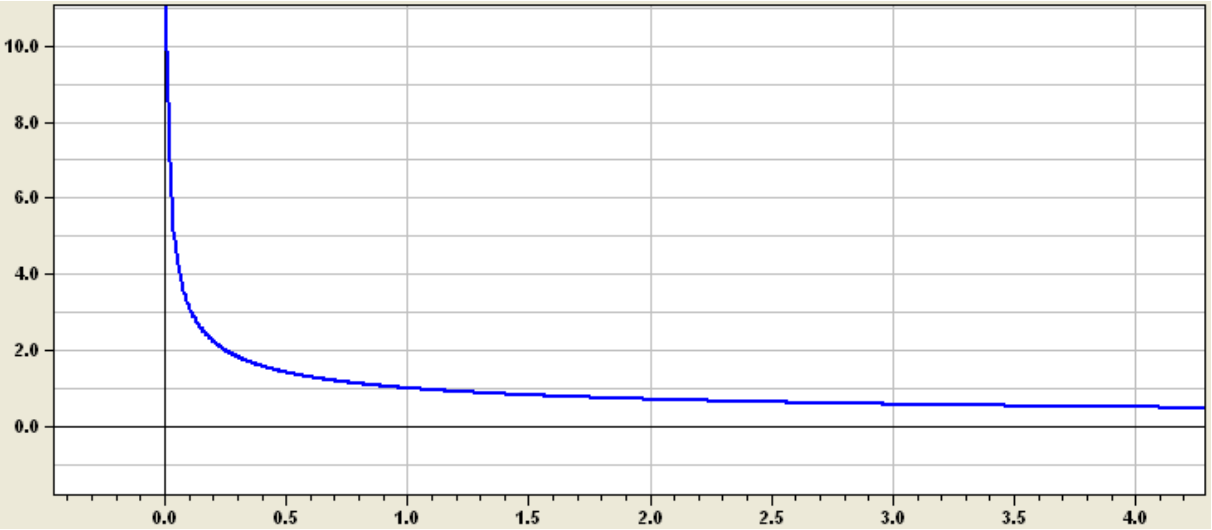
Berechnung der Fläche zwischen zwei Funktionen.

Soll nicht die Fläche zwischen Funktion und X-Achse berechnet werden, sondern zwischen zwei Funktionen so berechnet man jeweils die Flächen zwischen Funktion und X-Achse und bildet dann die Differenz. **Achtung:** Bei der Berechnung der Fläche zwischen 2 Funktionen musst du auf Schnittpunkte der beiden Funktionen achten. Schneiden sich die beiden Kurven, so musst du die Beträge der Flächen vor und hinter dem Schnittpunkt summieren.

Das uneigentliche Integral

Ist die Fläche unter einer Funktion nicht begrenzt, so muss der Grenzwert gebildet werden.

Beispiel: Soll die Funktion $1/\sqrt{x}$ zwischen 0 und 1 integriert werden, so ist die Fläche unbegrenzt. Sie strebt aber gegen einen Grenzwert.



Da die Funktion für $x = 0$ nicht definiert ist, muss der Grenzwert berechnet werden

$$\lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to 0}\left[2x^{\frac{1}{2}} + c\right]_a^1 = 2 - \lim_{a\to 0} 2\sqrt{0} = 2$$

Genauso kann es sein, dass die Fläche nicht in Richtung der X-Achse begrenzt wird, du also zwischen a und $-\infty$ oder a und $+\infty$ integrieren sollst. In diesem Fall musst du den Grenzwert $\lim_{a\to-\infty}\int_a^{\infty} f(x)dx$ ermitteln.

Übungsaufgaben zu 5.2

Aufgabe 5.2.1

Berechne die Fläche, die von folgenden Funktionen und der X-Achse zwischen -1 und 1 eingeschlossen wird.

1)$f(x) = x^3 + 2$

2)$f(x) = \sin x + 2x$

3)$f(x) = (2x + 1)^2$

Aufgabe 5.2.2

Bestimme die Fläche, die von den folgenden beiden Funktionen zwischen 0 und 1 eingeschlossen wird:

$$f(x) = 2x + 1$$

$$g(x) = 3x^2 + 2$$

Aufgabe 5.2.3

Bestimme die Fläche, die von den folgenden beiden Funktionen zwischen 0 und 2 eingeschlossen wird:

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = x$$

Lösungen zu 5.2

Lösung zu 5.2.1

1) Da $f(x)$ zwischen -1 und 1 keine Nullstellen besitzt, können wir direkt von -1 bis 1 integrieren.

$$\int_{-1}^{1}(x^3+2)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4+2x+c\right]_{-1}^{1}=\frac{9}{4}+\frac{7}{4}=4$$

2) Da $f(x)$ eine Nullstelle bei $x=0$ hat, integrieren wir zunächst von -1 bis 0 und dann von 0 bis 1 und addieren die Beträge der Flächen.

$$\int_{-1}^{1}\sin x+2x\;dx=\left|\int_{-1}^{0}\sin x+2x\;dx\right|+\left|\int_{0}^{1}\sin x+2x\;dx\right|$$

$$=\left|[-\cos x+x^2+c]_{-1}^{0}\right|+\left|[-\cos x+x^2+c]_{0}^{1}\right|$$

$$=|-1{,}46|+1{,}46=2{,}92$$

3) Die Funktion hat zwar bei $x=-0{,}5$ eine Nullstelle, aber da es sich um eine quadratische Funktion handelt, kann die Funktion keine negativen Werte annehmen. Daher können wir direkt von -1 bis 1 integrieren.

$$\int_{-1}^{1}(2x+1)^2\,dx=\left[\frac{4}{3}*x^3+x^2+x+c\right]_{-1}^{1}=\frac{14}{3}$$

Lösung zu 5.2.2

Da es keine Schnittpunkte zwischen den beiden Funktionen im Bereich 0 bis 1 gibt, können wir direkt die Differenz der Flächen zwischen X-Achse und der jeweiligen Funktion bilden.

Zunächst die Fläche zwischen $f(x)$ und der X-Achse zwischen 0 und 1:

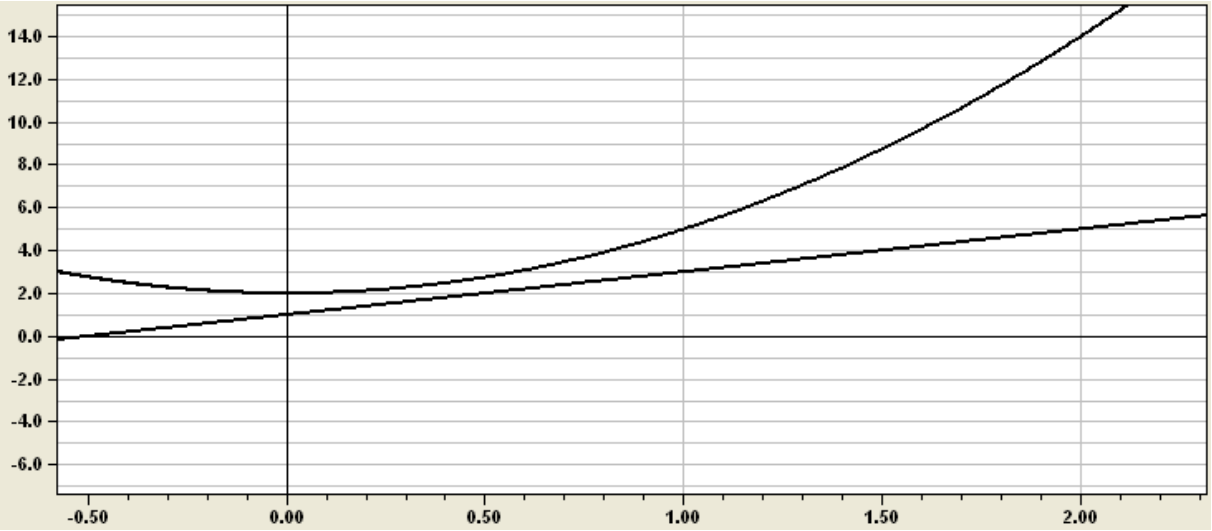
$$\int_{0}^{1}(2x+1)dx=[x^2+x+c]_{0}^{1}=2$$

Und die Fläche zwischen $g(x)$ und der x-Achse zwischen 0 und 1:

$$\int_{0}^{1}(3x^2+2)dx=[x^3+2x+c]_{0}^{1}=3$$

Die Differenz ist 1. Die Fläche, die von den beiden Funktionen zwischen 0 und 1 eingeschlossen wird, beträgt also 1.

Grafisch läßt sich das folgendermaßen veranschaulichen:



Lösung zu 5.2.3

Die beiden Funktionen haben einen Schnittpunkt bei $x = 1$. Um die eingeschlossene Fläche zwischen 0 und 2 zu bestimmen, berechnen wir zunächst die eingeschlossene Fläche zwischen 0 und 1, dann zwischen 1 und 2 und addieren dann die Beträge der Flächen.

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + c\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

Die eingeschlossene Fläche beträgt also $\frac{1}{6}$.

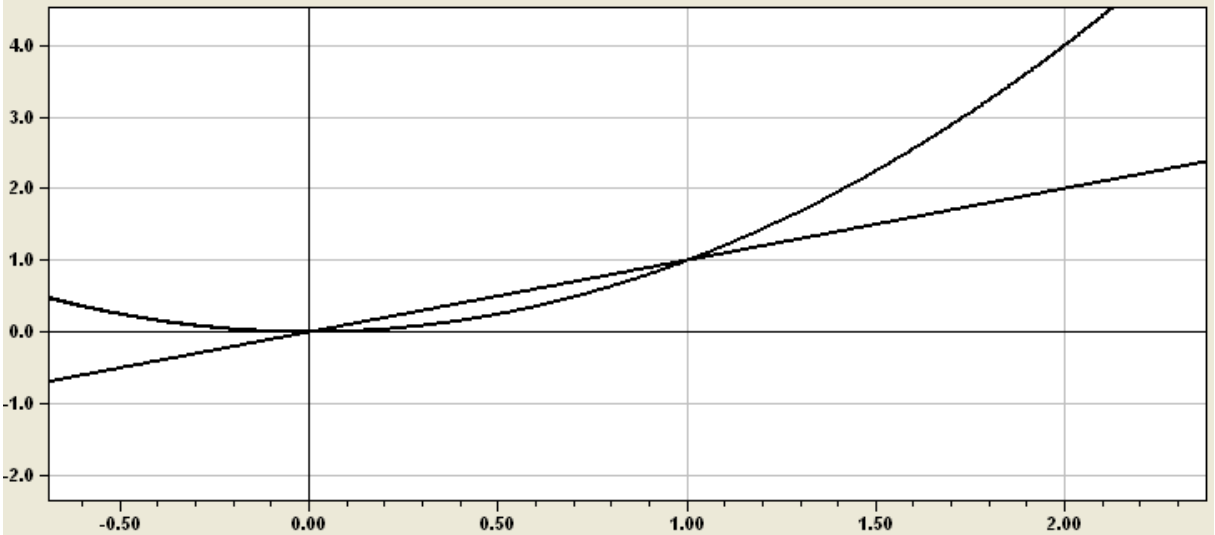
$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + c\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\int_1^2 x dx = 1\frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{3} - \frac{3}{2} = \frac{5}{6}$$

Insgesamt wird also die Fläche $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$ von den beiden Funktionen eingeschlossen. Denke daran, immer die Beträge der Flächen zu addieren!

Zum besseren Verständnis noch die Grafik:



6.0 Funktionen mehrerer Variabler

Aus der Schule kennst du wahrscheinlich nur Funktionen, die von einer Variablen abhängen. Funktionen können aber auch von mehreren Variablen abhängen.

Beispiel: Der Absatz dieses Skriptes ist davon abhängig, wie viele Studenten das Modul belegen und vom Preis, den ich dafür verlange.

Mathematisch schreibt man:

$$f(x_1, x_2)$$

für den Fall von zwei unabhängigen Variablen. Dabei ist x_1 beispielsweise die Anzahl der Studenten, die das Modul belegen und x_2 der Preis, den ich für das Skript verlange. Die abhängige Variable ist also gleichzeitig von zwei unabhängigen variablen abhängig.

Ein Beispiel für so eine Funktion wäre:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 + 2$$

Im folgenden werden wir einige Eigenschaften dieser Funktionen mehrerer Variabler besprechen.

Homogenität

Ich beginne mit der mathematischen Definition der Homogenität:

Eine Funktion ist homogen vom Grad r, wenn für jede reelle Zahl $\lambda > 0$ gilt:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots, \lambda x_n) = \lambda^r * f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Multipliziert man also alle Variablen mit λ, dann nimmt der Funktionswert den $\lambda^r -$ fachen Wert an.

Du kannst die Homogenität nach den Formeln des Skriptes berechnen. Bei den eher einfachen Funktionen, die in Klausuren geprüft werden, kannst du die Homogenität aber auch direkt ablesen. Dabei gilt:

- Sind $x_1$und x_2 durch Multiplikation verbunden, so sind sie homogen. Der Grad der Homogenität berechnet sich aus der Summe der beiden Exponenten.

- Sind $x_1$und x_2 durch Addition oder Subtraktion verbunden, so sind sie homogen, wenn sie denselben Exponenten haben, ansonsten nicht. Die Homogenität entspricht den 2 Exponenten (nicht der Summe dieser).

-Sollte die Homogenität nicht so leicht abgelesen werden können, so muss diese durch Umformung ermittelt werden.

Beispiel:

Gegeben sei die Funktion:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_1x_2$$

Bestimme die Homogenität.

Antwort: Die Funktion ist nicht homogen, da die beiden Summanden verschiedene (einzelne) Homogenitäten haben ($2x_1$ ist homogen vom Grad 1 und $4x_1x_2$ ist homogen vom Grad 2).

Partielle Ableitung

Bei der partiellen Ableitung wird ermittelt, wie sich der Zielfunktionswert ändert, wenn nur eine Variable minimal erhöht wird und alle anderen Variablen konstant gehalten werden. Daher müssen die anderen Variablen auch als Konstanten behandelt werden!

Beispiel:

Die erste partielle Ableitung der Funktion

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_1^2x_2$$

nach $x_1$ist:

$$f_{x_1}(x_1, x_2) = 2 + 8x_1x_2$$

x_2 wird hier also als Konstante behandelt.

Leitet man die erste Ableitung nach x_1 bzw. x_2 nach x_2 bzw. $x_1$ab, so erhält man die Kreuzableitung. Dabei ist es egal, nach welcher Variable man zuerst ableitet.

Beispiel:

$$f_{x_1,x_2}(x_1, x_2) = 8x_1$$

Gradient

Der Gradient ist der Vektor der beiden ersten Ableitungen einer Funktion mit 2 unabhängigen Variablen.

Mathematisch schreibt man:

$$Grad\ f(x_1, x_2) = \begin{matrix} f_{x_1}(x_1, x_2) \\ f_{x_2}(x_1, x_2) \end{matrix}$$

Interpretation: Die Richtung des Gradientenvektors ist die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion und die Länge des Gradientenvektors ist ein Maß für die Stärke des Anstiegs der Funktion in Richtung des Gradienten.

Hesse-Matrix

Die Hesse-Matrix besteht aus den zweiten partiellen Ableitungen.

Mathematisch schreibt man:

$$H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_{x_1,x_1}(x_1, x_2) & f_{x_1,x_2}(x_1, x_2) \\ f_{x_2,x_1}(x_1, x_2) & f_{x_2,x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe der Hesse-Matrix kann man Aussagen über die Konvexität/Konkavität der Funktion machen:

-Ist die Hesse-Matrix **positiv semidefinit**, so ist die Funktion konvex.

- Ist die Hesse-Matrix **streng positiv semidefinit**, so ist die Funktion streng konvex.

- Ist die Hesse-Matrix **negativ semidefinit**, so ist die Funktion konkav.

- Ist die Hesse-Matrix **streng negativ semidefinit**, so ist die Funktion streng konkav.

-In allen anderen Fällen kann keine Aussage über das Krümmungsverhalten gemacht werden (die Matrix ist **indefinit**).

Die Hesse-Matrix wird auch genutzt, um Aussagen über die kritischen Punkte der Funktion zu machen. Dabei gilt:

-Ist die Determinante der Hesse-Matrix an einem kritischen Punkt positiv, so liegt ein Extremwert vor. Ist das Element $a_{11} > 0$, so handelt es sich um ein Minimum. Ist das Element $a_{11} < 0$, so handelt es sich um ein Maximum.

-Ist Hesse-Matrix an einem kritischen Punkt negativ, so liegt ein Sattelpunkt vor.

Hauptunterdeterminantenkriterium

Die Definitheit einer Matrix läßt sich auch anhand der Hauptunterdeterminanten (Minoren) bestimmen:

Sind alle Hauptunterdeterminanten positiv, so ist die Matrix positiv definit.

Alternieren die Vorzeichen der Hauptunterdeterminanten, so ist die Matrix negativ definit.

Die Semidefinitheit kann über die Hauptunterdeterminanten nicht bestimmt werden.

Das totale Differential

Beim totalen Differential wir die Änderung des Funktionswertes bei einer infinitisimal kleinen Erhöhung beider bzw. aller unabhängigen Variablen ermittelt. Diese ist die Summer der beiden/aller partiellen Ableitungen.

Mathematisch schreibt man:

$$df(x_1, x_2) = f'_{x1} * dx_1 + f'_{x2} * dx_2$$

Beispiel:

$$y = 3x + 4z^2$$

Zur Bestimmung des totalen Differentials bildet man zunächst beide Ableitungen:

$$\frac{dy}{dx} = 3$$

$$\frac{dy}{dz} = 8z$$

Das totale Differential ist dann:

$$dy = 3 * dx + 8z * dz$$

$$df(x_1, x_2) = f'_{x1} * dx_1 + f'_{x2} * dx_2$$

Isoquanten

An dieser Stelle empfiehlt es sich das Thema Isoquanten und Grenzrate der Substitution aus Einführung in die Wirtschaftswissenschaft zu widerholen. Ich habe daher den entsprechenden Abschnitt aus meinem Skript einkopiert:

Bei substitutionalen Produktionsfunktionen mit 2 Produktionsfaktoren kann man den Einsatz des einen Faktors verringern und den Einsatz des anderen Faktors erhöhen, ohne dass die Ausbringungsmenge sich ändert. Eine gegebene Ausbringungsmenge kann also mit verschiedenen Faktorkombinationen produziert werden. Grafisch kann dieses Verhältnis in einem Diagramm mit den beiden Produktionsfaktoren r_1 und r_2 dargestellt werden. Die Linie, die alle möglichen Faktorkombinationen für eine gegebene Ausbringungsmenge darstellt, nennt man Isoquante.

Mathematisch erhält man die Isoquantengleichung aus der Produktionsfunktion, indem man die Produktionsfunktion nach $r_2$auflöst.

Beispiel:

Für die Produktionsfunktion

$$M = 2r_1 * \sqrt{r_2}$$

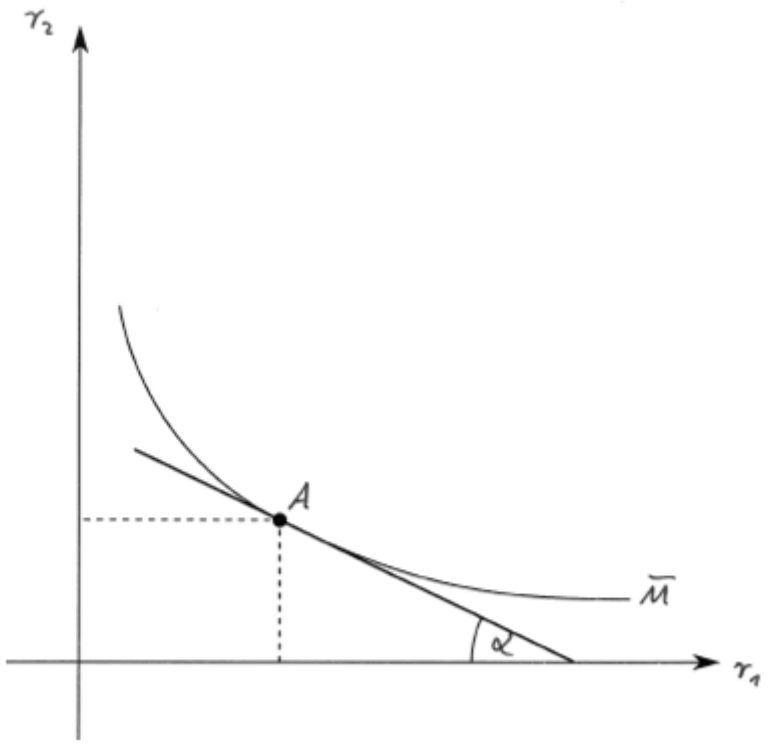
ergibt sich die Isoquantengleichung:

$$r_2 = \left(\frac{M}{2r_1}\right)^2$$

Die Durchschnittsrate der technischen Substitution bezüglich zweier Punkte auf der Isoquante erhält man, indem man die Änderung des einen Faktors durch die Änderung des anderen Faktors teilt.

Grenzrate der Substitution

Wie man an der Isoquante sieht, ist das Tauschverhältnis zwischen den beiden Einsatzfaktoren nicht konstant, sondern abhängig von dem jeweiligen Faktoreinsatzverhältnis. Die Grenzrate der Substitution gibt für jeden Punkt der Isoquante an, welche Menge des einen Faktors notwendig ist, um eine sehr kleine Einheit des anderen Faktors zu ersetzen. Grafisch wird dieses Tauschverhältnis für einen bestimmten Punkt auf der Isoquante durch die Tangente durch diesen Punkt dargestellt.



Mathematisch beträgt die Grenzrate der Substitution:

$$GRS_{2,1} = \frac{dr_2}{dr_1} = -\frac{\frac{\partial M}{\partial r_1}}{\frac{\partial M}{\partial r_2}}$$

,wobei $\frac{\partial M}{\partial r_1}$ die erste Ableitung der Gesamtertragskurve nach dem Faktor r_1 darstellt.

Man kann die Grenzrate der Substitution ermitteln, indem man die Produktionsfunktion nach r_2 umstellt und dann nach r_1 ableitet oder indem man das totale Differential der Produktionsfunktion bildet und nach $\frac{dr_2}{dr_1}$ umstellt. Beide Herleitungen können sehr gut in der Klausur vorkommen.

Grenzrate der Substitution - Herleitung Variante 1 (totales Differential):

Gegeben sei eine Produktionsfunktion der Form $M = f(r_1, r_2)$

Das totale Differential ist dann:

$$dM = \frac{\partial M}{\partial r_1} dr_1 + \frac{\partial M}{\partial r_2} dr_2$$

Da die Grenzrate der Substitution für eine konstante Ausbringungsmenge berechnet wird, gilt $dM = 0$.

$$dM = \frac{\partial M}{\partial r_1} dr_1 + \frac{\partial M}{\partial r_2} dr_2 = 0$$

Aufgelöst nach $\frac{dr_2}{dr_1}$ erhält man:

$$\frac{dr_2}{dr_1} = -\frac{\frac{\partial M}{\partial r_1}}{\frac{\partial M}{\partial r_2}}$$

Grenzrate der Substitution - Herleitung Variante 2 (Isoquantengleichung):

Die zweite Möglichkeit, die Grenzrate der Substitution herzuleiten besteht darin die Produktionsfunktion nach r_2 umzustellen (Isoquantengleichung) und nach r_1 abzuleiten:

Beispiel:

Gegeben sei die substitutionale Produktionsfunktion:

$$M = 2r_1 r_2$$

Zur Ermittlung der Grenzrate der Substitution löst man diese Gleichung nach r_2 auf:

$$r_2 = \frac{M}{2r_1}$$

und leitet nach r_1 ab:

$$\frac{dr_2}{dr_1} = -\frac{M}{2r_1^2} = -\frac{2r_1 r_2}{2r_1^2} = -\frac{r_2}{r_1}$$

Dies entspricht

$$\frac{dr_2}{dr_1} = -\frac{\frac{\partial M}{\partial r_1}}{\frac{\partial M}{\partial r_2}}$$

denn

$$-\frac{\frac{\partial M}{\partial r_1}}{\frac{\partial M}{\partial r_2}} = -\frac{2r_2}{2r_1} = -\frac{r_2}{r_1}$$

Änderungsraten und Elastizitäten

Partielle Änderungsrate

Die partielle Änderungsrate gibt die relative Änderung des Funktionswertes auf eine Änderung der einzelnen unabhängigen Variablen an.

Mathematisch schreibt man:

$$A_{x_1} f(x_1, x_2) = \frac{f'_{x_1}(x_1, x_2)}{f(x_1, x_2)}$$

Also einfach nur die partielle Ableitung geteilt durch die Funktion.

Elastizität

Für die Elastizität gilt:

$$E_{x_1} f(x_1, x_2) = x_{1*} A_{x_1} f(x_1, x_2) = x_1 \frac{f'_{x_1}(x_1, x_2)}{f(x_1, x_2)}$$

Extrema bei Funktionen mehrerer Variabler

Die Extrema von Funktionen mehrerer Variabler werden wie folgt ermittelt:

1) Es werden die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung berechnet.

2) Es werden die Nullstellen der partiellen Ableitungen erster Ordnung ermittelt. Hierzu muss ein Gleichungssystem aufgestellt und aufgelöst werden.

3) Es wird die Hesse-Matrix aufgestellt, die Nullstellen werden eingesetzt und die Determinante berechnet.

Es gelten nun folgende Bedingungen:

- Wenn $detH > 0$, dann liegt ein Extremwert vor. Ist das Element $a_{11} > 0$, dann Minimum, ist $a_{11} < 0$, dann Maximum.

- Wenn $detH < 0$, dann liegt ein Sattelpunkt vor.

- Wenn $detH = 0$, dann ist keine Aussage möglich.

Beispiel:

Zu ermitteln sind die Extremstellen der folgenden Funktion:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4}x_1^3 - x_1 + \frac{1}{2}x_1x_2$$

Antwort:

Zunächst bildest du die partiellen Ableitungen:

$$f'_{x_1} = \frac{3}{4}x_1^2 - 1 + \frac{1}{2}x_2$$

$$f''_{x_1,x_1} = \frac{3}{2}x_1$$

$$f'_{x_2} = \frac{1}{2}x_1$$

$$f''_{x_2,x_2} = 0$$

$$f''_{x_1,x_2} = \frac{1}{2}$$

Die Nullstellen der ersten partiellen Ableitungen sind:

$$\frac{3}{4}x_1^2 - 1 + \frac{1}{2}x_2 = 0$$

$$\frac{1}{2}x_1 = 0$$

Es folgt:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 2$$

Aufstellen der Hesse-Matrix:

$$H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x_1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Für $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ gilt

$$detH = -\frac{1}{4}$$

Daher liegt an der Stelle

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 2$$

ein Sattelpunkt vor.

Extremwerte unter Nebenbedingungen

Bei der Berechnung von Extremwerten unter Nebenbedingungen ist eine Zielfunktion unter Einhaltung von verschieden vielen Nebenbedingungen zu maximieren/minimieren. Dieses Modell ist aus der linearen Optimierung bekannt.

Zur Berechnung von Extremwerten unter Nebenbedingungen gibt es zwei Methoden:

- die Substitutionsmethode

- die Lagrangemethode

Zur Substitutionsmethode:

Es wird zunächst eine Nebenbedingung nach einer Variablen aufgelöst und diese dann in die Zielfunktion eingesetzt. In Klausuraufgaben erhält man meist eine Funktion in Abhängigkeit einer Variablen und kann diese auf Extremwerte untersuchen.

Beispiel:

Es sollen die Extremwerte der Funktion

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 20$$

unter der Nebenbedingung

$$x_1 + x_2 = 4$$

ermittelt werden.

Lösung:

Auflösung der Nebenbedingung nach einer Variablen:

$$x_1 = -x_2 + 4$$

Einsetzen in die Zielfunktion

$$f(x_1, x_2) = -(-x_2 + 4)^2 - 2x_2^2 + 20$$

Zu dieser Funktion können nun leicht die Extremstellen berechnet werden

$(x_2 = 1{,}33,\ woraus\ x_1 = 2{,}67\ folgt)$.

Zur Lagrangemethode:

In der Nebenbedingung werden zunächst alle Terme auf die linke Seite gebracht, sodass auf der anderen Seite der Gleichung die Null steht. Nun wird die Lagrangefunktion aufgestellt (Zielfunktion$+\lambda *$ „linke Seite der umgeformten Nebenbedingung“).

Nun müssen noch die ersten partiellen Ableitungen (auch nach λ!) gebildet werden und gleich Null gesetzt werden.

Beispiel:

Es sollen die Extremwerte der Funktion

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 20$$

unter der Nebenbedingung

$$x_1 + x_2 = 4$$

ermittelt werden.

Lösung

Umformung der Nebenbedingung:

$$x_1 + x_2 - 4 = 0$$

Aufstellen der Lagrangefunktion:

$$L = f(x_1, x_2, \lambda) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 20 - \lambda(x_1 + x_2 - 4)$$

Bilden der partiellen Ableitungen:

$$f'_{x_1} = -2x_1 - \lambda$$

$$f'_{x_2} = -4x_2 - \lambda$$

$$f'_{\lambda} = x_1 + x_2 - 4$$

Ermitteln der Nullstellen:

$$-2x_1 - \lambda = 0$$

$$-4x_2 - \lambda = 0$$

$$x_1 + x_2 - 4 = 0$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$\lambda = -2x_1$$

eingesetzt in Gleichung 2:

$$-4x_2 + 2x_1 = 0$$

woraus folgt:

$$x_1 = 2x_2$$

Eingesetzt in Gleichung 3 folgt:

$$x_2 = 1{,}33$$

und somit

$$x_1 = 2{,}67$$

Aufgaben zu 6.0

Aufgabe 6.1

a) Berechne die partiellen Ableitungen der 1. Und 2. Ordnung für folgende Funktion:

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_1^2 + \frac{1}{x_2^1}$$

b) Berechne den Wert des Gradienten an der Stelle (1,2).

Aufgabe 6.2

Bilde die Kreuzableitung zu der Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1 + \frac{x_1^2}{x_2}$$

Aufgabe 6.3

Berechne das totale Differential zu der folgenden Funktion:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + \frac{x_1^2}{x_2}$$

Aufgabe 6.4

Gegeben sei die folgende Funktion:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_1 x_2 + 2x_2^2$$

Ist die Funktion konvex?

Aufgabe 6.5

Berechne die Extremstellen der folgenden Funktion:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_1 x_2$$

Aufgabe 6.6

Berechne den Betrag des Gradientenvektors für folgende Funktion an der Stelle (1,2):

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4 - 4x_1x_2 + 5$$

Aufgabe 6.7

Berechne die Extremstellen der folgenden Produktionsfunktion mit den Faktoreinsatzmengen x_1 und x_2:

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 - 3x_1^2 + 3x_2^3 - 36x_2 + 10$$

Aufgabe 6.8

Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$f(x_1, x_2) = e^{x_1x_2}$$

,wobei x_1x_2 Faktoreinsatzmengen bezeichnen.

Die Nebenbedingung ist

$$x_1 + x_2 = 4$$

Berechne mit Hilfe der Substitutionsmethode das Maximum der Funktion.

Aufgabe 6.9

Berechne zu folgenden Produktionsfunktionen die Isoquantengleichung:

a) $M = 2r_1 + 4r_2$

b) $M = 2 * \sqrt{r_1 r_2}$

c) $M = \sqrt{r_1} * r_2$

Aufgabe 6.10

Skizziere eine überlinear homogene, eine unterlinear homogene, eine linear homogene und eine inhomogene Produktionsfunktion in einem Koordinatensystem. Zeichne auch das Niveau λ ein.

Aufgabe 6.11

Gib zu den folgenden Funktionen an, ob sie homogen sind und gib an, ob sie überlinear, unterlinear oder linear homogen sind.

a) $M = r_1^{\frac{1}{2}} * r_2^2$

b) $M = 2r_1^{\frac{1}{3}} * r_2^{\frac{1}{2}}$

c) $M = r_1^2 + r_2$

d) $M = 2r_1^2 + r_2^2$

Aufgabe 6.12

Leite die Grenzrate der Substitution für die substitutionale Profuktionsfunktion

$$M = 2r_1 * r_2^2$$

a) aus dem totalen Differential her.

(Totales Differential siehe Anhang!)

b) her, indem du die entsprechende Isoquante nach r_1 ableitest.

Aufgabe 6.13

Ein Unternehmen verfügt über folgende Produktionsfunktion:

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1 + x_2}$$

a) Berechne die Produktionselastizität des ersten Faktors.

b) Bestimme den Homogenitätsgrad.

Lösungen zu 6.0

Lösung zu 6.1

a)

$$f'_{x_1}(x_1, x_2) = x_2 + 2x_1$$

$$f''_{x_1x_1}(x_1, x_2) = 2$$

$$f'_{x_2}(x_1, x_2) = x_1 - \frac{1}{x_2^2}$$

$$f''_{x_2x_2}(x_1, x_2) = 2\frac{1}{x_2^3}$$

b)

Der Gradiente ist der Vektor aus den beiden ersten partiellen Ableitungen.

$$grad\, f(x_1, x_2) = \left(x_2 + 2x_1 \quad x_1 - \frac{1}{x_2^2}\right)$$

$$grad\, f(1{,}2) = \left(2 + 2 \quad \frac{3}{4}\right) = (4 \quad 0{,}75)$$

Lösung zu 6.2

$$f'_{x_1}(x_1, x_2) = 1 + \frac{2x_1}{x_2}$$

$$f''_{x_1x_2}(x_1, x_2) = -\frac{2x_1}{x_2^2}$$

Lösung zu 6.3

$$df(x_1, x_2) = \left(1 + \frac{2x_1}{x_2}\right)dx_1 + \left(-\frac{x_1^2}{x_2^2}\right)dx_2$$

Lösung zu 6.4

Ermittlung der Hesse-Matrix:

$$f'_{x_1}(x_1, x_2) = 4x_1 - x_2$$

$$f''_{x_1x_1}(x_1, x_2) = 4$$

$$f'_{x_2}(x_1, x_2) = -x_1 + 4x_2$$

$$f''_{x_2x_2}(x_1, x_2) = 4$$

$$f''_{x_1x_2}(x_1, x_2) = -1$$

$$Hf(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Da die Hessematrix positiv definit ist, ist $f(x_1, x_2)$ streng konvex.

Lösung zu 6.5

Zunächst ermittelt man die ersten partiellen Ableitungen:

$$f'_{x_1}(x_1, x_2) = 4x_1 - 8x_2$$

$$f'_{x_2}(x_1, x_2) = 8x_2 - 8x_1$$

Diese müssen zu Null gesetzt werden:

$$4x_1 - 8x_2 = 0$$

$$8x_2 - 8x_1 = 0$$

Das Gleichungssystem ist nicht lösbar. Es existieren keine Extremstellen.

Lösung zu 6.6

Bildung der partiellen Ableitungen erster Ordnung:

$$f'_{x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 - 4x_2$$

$$f'_{x_2}(x_1, x_2) = 4x_2^3 - 4x_1$$

Der Gradientenvektor ist dann:

$$grad\, f(x_1, x_2) = (2x_1 - 4x_2 \quad 4x_2^3 - 4x_1)$$

Der Betrag dieses Vektors (bekannt aus Grundlagen der Wirtschaftsmathematik und Statistik) an der Stelle (1,2) ist dann:

$$|grad\, f(x_1, x_2)| = \sqrt{820}$$

Lösung zu 6.7

Zunächst bildet man die partiellen Ableitungen erster Ordnung:

$$f'_{x_1}(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 6x_1$$

$$f'_{x_2}(x_1, x_2) = 9x_2^2 - 36$$

Diese werden zu Null gesetzt und aufgelöst.

$$3x_1^2 - 6x_1 = 0$$

$$9x_2^2 - 36 = 0$$

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$x_1^2 = 2x_1$$

$$x_2^2 = 4$$

Die Nullstellen sind entsprechend:

$$x_{1_1} = 0$$

$$x_{1_2} = 2$$

$$x_{2_1} = -2$$

$$x_{2_2} = 2$$

Da Faktoreinsatzmengen nicht negativ sein können, erhält man die Extremstellen (0,2) und (2,2).

Lösung 6.8

Die Nebenbedingung wird nach einer Variablen umgeformt und in die Funktion eingesetzt:

$$x_1 = 4 - x_2$$

$$f(x_2) = e^{(4-x_2)x_2}$$

Nun werden die ersten beiden Ableitungen der Funktion gebildet (Kettenregel)

$$f'(x_2) = (-2x_2 + 4)e^{4x_2 - x_2^2}$$

$$f''(x_2) = -2e^{4x_2 - x_2^2} + (-2x_2 + 4)^2 e^{4x_2 - x_2^2}$$

Die Extremstellen sind die Nullstellen der ersten Ableitung.

$$(-2x_2 + 4)e^{4x_2 - x_2^2} = 0$$

Da die e-Funktion keine Nullstellen hat, gilt für die Nullstelle:

$$-2x_2 + 4 = 0$$

$$x_2 = 2$$

Anhand der zweiten Ableitung bestimmt man, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt:

$$f''(2) = -2e^{4*2-2^2} + (-2*2+4)^2 e^{4*2-2^2}$$

Der Wert ist negativ und damit handelt es sich um ein Maximum.

Lösung zu 6.9

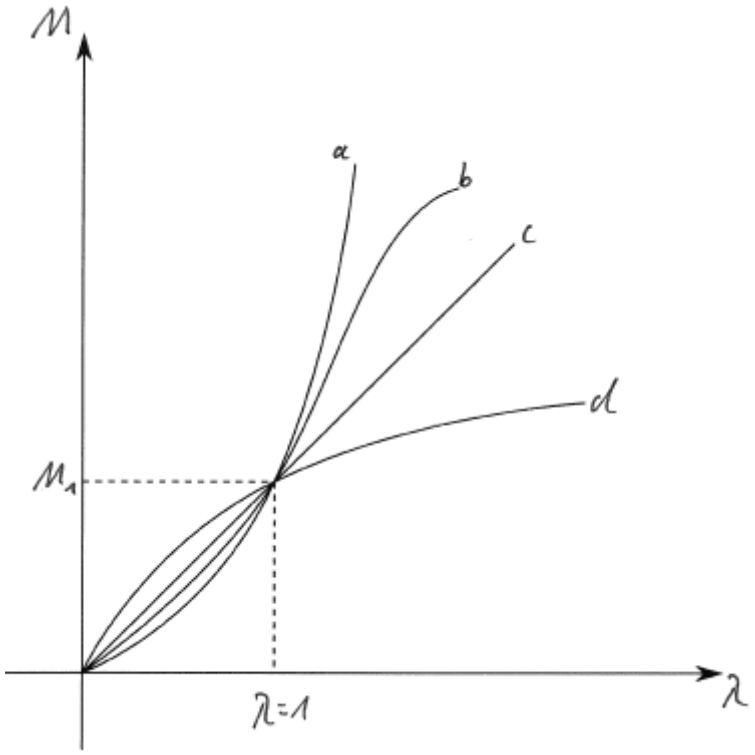
Die Produktionsfunktionen müssen nach r_2 umgestellt werden, um die Isoquantengleichung zu erhalten.

a) $r_2 = 0{,}25M - 0{,}5r_1$

b) $r_2 = \frac{M^2}{4r_1}$

c) $r_2 = \frac{M}{\sqrt{r_1}}$

Lösung zu 6.10



a) überlinear homogen

b) nicht homogen

c) linear homogen

d) unterlinear homogen

Lösung zu 6.11

Du kannst die Homogenität nach den Formeln des Skriptes berechnen. Bei den eher einfachen Formen der Produktionsfunktionen, die in Klausuren geprüft werden, kannst du die Homogenität aber auch direkt ablesen. Dabei gilt:

- Sind r_1 und r_2 durch Multiplikation verbunden, so sind sie homogen. Der Grad der Homogenität berechnet sich aus der Summe der beiden Exponenten.

- Sind r_1 und r_2 durch Addition oder Subtraktion verbunden, so sind sie homogen, wenn sie denselben Exponenten haben, ansonsten nicht. Die Homogenität entspricht den 2 Exponenten (nicht der Summe dieser).

a) homogen vom Grad 2,5, also überlinear (da größer als 1).

b) homogen vom Grad $\frac{5}{6}$, also unterlinear (da kleiner als 1).

c) inhomogen, da verschiedene Exponenten und durch Addition verbunden.

d) homogen vom Grad 2, da 2 der Exponent bei beiden Faktoren ist, also überlinear.

Lösung zu 6.12

a) Das totale Differential lautet:

$$dM = 2r_2^2 dr_1 + 4r_1 r_2 dr_2$$

Da die Ausbringungsmenge als konstant angenommen wird, gilt:

$$2r_2^2 dr_1 + 4r_1 r_2 dr_2 = 0$$

$$2r_2^2 dr_1 = -4r_1 r_2 dr_2$$

$$\frac{2r_2^2}{-4r_1 r_2} = \frac{dr_2}{dr_1}$$

$$-\frac{r_2}{2r_1} = \frac{dr_2}{dr_1}$$

b) Die Gleichung für die Isoquante lautet:

$$r_2 = \sqrt{\frac{M}{2r_1}}$$

Ableiten nach r_1:

Kettenregel: äußere Ableitung mal innere Ableitung

$$\frac{dr_2}{dr_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2r_1}\right)^{-\frac{1}{2}} * \left(-\frac{M}{2r_1^2}\right)$$

$M = 2r_1 * r_2^2$einsetzten und Kürzen.

$$= \frac{1}{2}(r_2^2)^{-\frac{1}{2}} * \left(-\frac{2r_1 * r_2^2}{2r_1^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2r_2} * \left(-\frac{2 * r_2^2}{2r_1}\right)$$

$$= -\frac{r_2}{2r_1}$$

Hinweis: Die Kettenregel ist für die Klausur höchstwahrscheinlich nicht relevant.

Weitere mögliche Klausuraufgaben:

Aufgabe 6.13

Ein Unternehmen verfügt über folgende Produktionsfunktion:

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1 + x_2}$$

a) Berechne die Produktionselastizität des ersten Faktors.

b) Bestimme den Homogenitätsgrad.

Lösung zu 6.13

a)Für die Elastizität gilt:

$$E_{x_1} f(x_1, x_2) = x_{1*} A_{x_1} f(x_1, x_2) = x_1 \frac{f'_{x_1}(x_1, x_2)}{f(x_1, x_2)}$$

Bei der Ermittlung der ersten Ableitung muss jeweils die Quotientenregel genutzt werden:

Zur Erinnerung, kurz die **Quotientenregel:**

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

$$f'(x) = \frac{g'(x) * h(x) - g(x) * h'(x)}{(h(x))^2}$$

$$f'_{x_1}(x_1, x_2) = \frac{2x_1 x_2^2 * (x_1 + x_2) - x_1^2 x_2^2}{(x_1 + x_2)^2}$$

$$E_{x_1} f(x_1, x_2) = \frac{(2x_1 x_2^2 * (x_1 + x_2) - x_1^2 x_2^2) * (x_1 + x_2)}{(x_1 + x_2)^2 * x_1^2 x_2^2}$$

Nun kann gekürzt werden:

$$E_{x_1} f(x_1, x_2) = \frac{(2(x_1 + x_2) - 1) * (x_1 + x_2)}{(x_1 + x_2)^2}$$

b)

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \frac{\lambda^2 x_1^2 \lambda^2 x_2^2}{\lambda x_1 + \lambda x_2} = \lambda^3 f(x_1, x_2)$$

Statistik

5.0 Grundbegriffe

Dieses Kapitel besteht aus relativ einfachen Begriffsdefinitionen, die in späteren Kapiteln benötigt werden. Sie werden aber auch sehr regelmäßig in Klausuren geprüft. Prüfungsschwerpunkt lag in den bisherigen Klausuren auf den „Messbarkeitseigenschaften von Merkmalen“.

Als Zusammenfassung des Stoffes empfehle ich das Glossar und werde hier nur die Messbarkeitseigenschaften von Merkmalen und Verteilungen behandeln. Die restlichen Grundbegriffe sind natürlich auch wichtig. Ich verzichte aber darauf, das Glossar abzuschreiben.

5.1 Messbarkeitseigenschaften von Merkmalen

Es wird generell zwischen den folgenden Merkmalsarten unterschieden:

- **Qualitative Merkmale**: Die Merkmale können nur nach dem Kriterium „gleich“ oder „ungleich“ gemessen werden. Eine Rangfolge ist nicht möglich. Man sagt: Das Merkmal ist nur **nominal** messbar. **Beispiel:** Staatsangehörigkeit.

- **Intensitätsmäßige Merkmale**: Die Merkmale können nach dem Kriterium „gleich“ oder „ungleich“ gemessen werden und eine Rangfolge ist möglich (Der Abstand zwischen den einzelnen Ausprägungen besitzt aber keine Aussagekraft). Das Merkmal ist **ordinal** messbar.

Beispiel: Die Studenten der Fernuni werden nach Notendurchschnitt in 3 Klassen eingeteilt.

Klasse 1: bis 2.0

Klasse 2: bis 4.0

Klasse 3 : bis 6.0

(Immer wenn ein Merkmal in Klassen eingeteilt wird, handelt es sich um ein ordinal messbares Merkmal.)

- Quantitative Merkmale: Dem Merkmal wird eine Zahl zugewiesen und es ist **metrisch** bzw. **kardinal** messbar. Der Abstand zwischen den einzelnen Ausprägungen besitzt also Aussagekraft.

Beispiel: Körpergröße.

Es wird weiter zwischen diskreten und stetigen Merkmalen unterschieden:

- Diskretes Merkmal: Das Merkmal kann endlich viele, oder abzählbar unendlich viele Ausprägungen annehmen.

Beispiel: Schulnoten, Kinderzahl, Familienstand.

- Stetiges Merkmal: Das Merkmal kann mehr als abzählbar unendlich viele Ausprägungen annehmen.

Beispiel: Körpergröße, Zeitdauer.

Achte bei der Bestimmung des Merkmalstyp auf die Begrenzung der Messgenauigkeit. Ist diese unbegrenzt, so handelt es sich um ein stetiges Merkmal. Ist sie begrenzt, der minimale Abstand zwischen zwei Merkmalen also bestimmbar, so handelt es sich um ein diskretes Merkmal.

Skalentransformation

Ähnlich wie bei Funktionen, wird durch eine Skalentransformation jedem Merkmal einer Skala ein Wert zugeordnet. Die Eigenschaften der Skala müssen dabei unverändert werden.

Beispiel: Bei einer Umfrage nach der beliebtesten Automarke könnte man

BMW $= 1$

Audi $= 2$

VW $= 3$

…

zuordnen.

Die Transformation muss eindeutig sein. Es können also nicht 2 Merkmale dieselbe Zuordnung bekommen (Audi und VW beide die 2).

Die Transformation ist monoton, wenn die Rangfolge erhalten bleibt.

Beispiel: Schulnoten

Sehr gut $= 1$

Gut $= 2$

Befriedigend $= 3$

Ausreichend $= 4$

Mangelhaft $= 5$

Transformationen können immer von einer Skala mit hohem Informationsniveau auf eine Skala mit niedrigerem Informationsniveau vorgenommen werden. Dabei sind folgende Regeln zu beachten:

- Die Transformation einer Rangskala muss mindestens monoton sein.

- Die Transformation einer Kardinalskala muss linear sein.

Achte bei Skalentransformationen immer darauf, dass diese Sinn ergeben müssen. In Klausuren wurde z.B. oft gefragt ob eine lineare Transformation der Form $y = ax + b$ zulässig sei. Solch eine Transformation macht für nominale Merkmale keinen Sinn (Aus „VW“ wird $a * \mathrm{VW} + b$).

5.2 Häufigkeiten und Verteilungen

Es gibt:

- Absolute Häufigkeiten: Die Anzahl einer bestimmten Merkmalsausprägung.

Beispiel: Es wurden 100 Studenten befragt und 12 hatten eine 3 als Notenschnitt.

- Relative Häufigkeiten: Der Anteil einer bestimmten Merkmalsausprägung an der Gesamtzahl aller Merkmalsausprägungen.

Beispiel: Es wurden 100 Studenten befragt, und 12% hatten eine 3 als Notenschnitt.

Verteilungen:

Die Darstellung der Merkmalsausprägungen und ihrer entsprechenden Häufigkeiten nennt man Verteilung.

Diese kann in Tabellenform oder als Diagramm dargestellt sein.

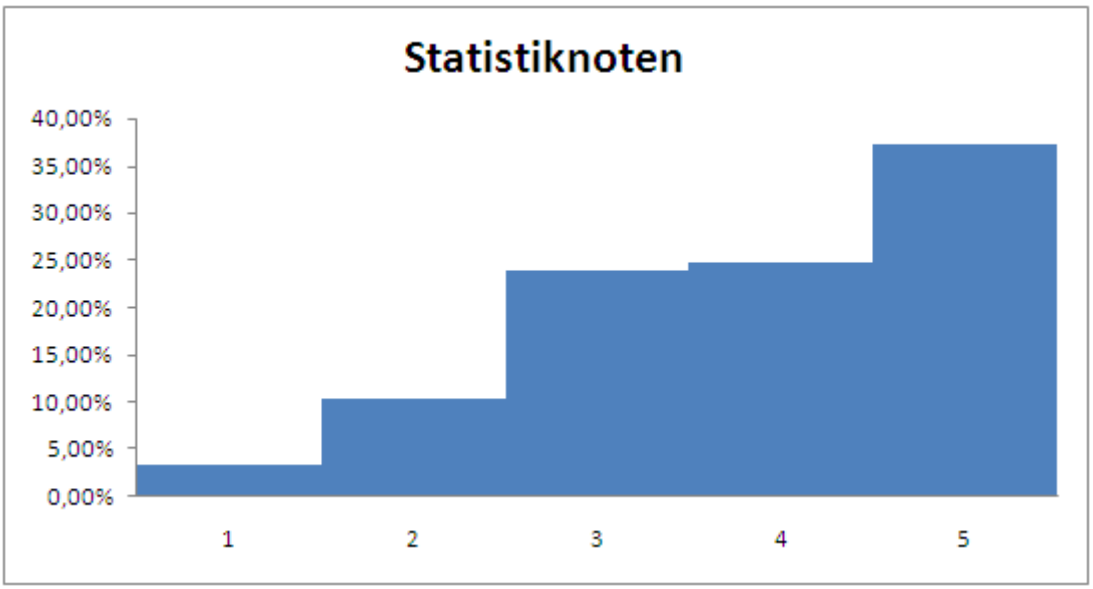
Beispiel:

Die Notenstatistik der letzten Statistikklausur der Fernuni ist:

Note	1	2	3	4	5	Gesamt
Anzahl	19	57	132	137	204	549
Rel. Häufigkeit	3,46%	10,38%	24,04%	24,95%	37,16%	

Diese Verteilung kann man auch als Diagramm darstellen:

Zum **Beispiel** die Darstellung als **Histogramm:**



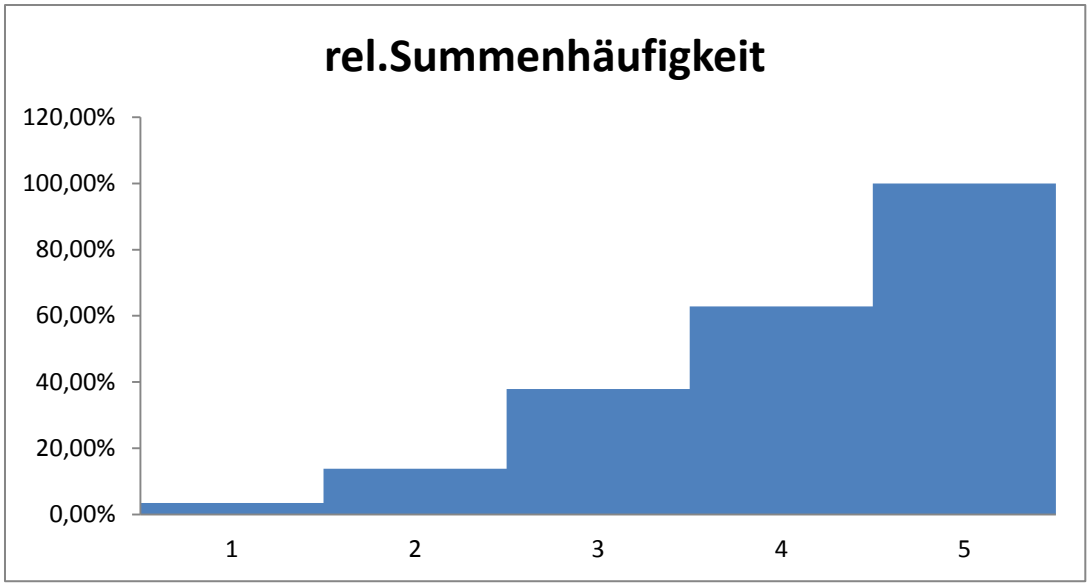
Das Histogramm ist ein Flächendiagramm. Die Fläche zwischen 0 und 1 entspricht dem Anteil der Merkmalsausprägungen, die die 1 annehmen. Sind alle Balken von der Breite 1, so bezeichnen die Y-Werte die relativen Häufigkeiten. Ansonsten müssen diese berechnet werden (Breite $*$ Höhe). Das Histogramm eignet sich nur für die Darstellung metrisch messbarer Daten.

Eine weitere wichtige Darstellungsform der Daten ist die **Summenhäufigkeit**. Dabei werden die Häufigkeiten von links nach rechts summiert. Die Summenhäufigkeit gibt also an, wie viele Merkmalsausprägungen den Wert x oder einen kleineren annehmen.

Es wird unterschieden zwischen der absoluten Summenhäufigkeit $H(x)$und der relativen Summenhäufigkeit $F(x)$.

Note	1	2	3	4	5
Anzahl	19	57	132	137	204
abs. Summenhäufigk.	19	76	208	345	549
Rel. Häufigkeit	3,46%	10,38%	24,04%	24,95%	37,16%
Rel.Summenhäufigk.	3,46%	13,84%	37,89%	62,84%	100,00%

Zum **Beispiel** haben 37,89% in der letzten Statistikklausur eine 3 oder eine bessere Note gehabt.



Das Gegenstück dazu ist die Resthäufigkeitsverteilung. Sie summiert von rechts nach links und gibt entsprechend an, wie viele Ausprägungen gleich x oder größer sind.

Polygonzug

Verbindet man die Punkte des Balkendiagramms mit geraden Linien, so nennt man das einen Polygonzug. Dadurch werden die Daten zwischen den Merkmalsausprägungen interpoliert (als Y-Wert für $x = 4{,}5$ wird der Mittelwert zwischen $x = 4$ und $x = 5$ genommen usw.) Besonders am Rand der Verteilung werden so Daten angezeigt, die evtl. außerhalb des Ausprägungsbereichs liegen.

Für die Klausur solltest du dir noch merken, dass Balkendiagramme besonders gut zur Darstellung nominaler und ordinaler Merkmale geeignet sind.

Aufgaben zu 5.0

Aufgabe 5.1

Gib zu folgenden Merkmalen an, ob sie ordinal, nominal oder kardinal messbar sind und ob sie stetig sind oder diskret:

a) Familienstand

b) Schulnote

c) Alter

d) Geschwindigkeit

e) Anzahl der Studenten der Fernuni

f) KFZ Kennzeichen

g) Temperatur

h) Haarfarbe

Aufgabe 5.2

Gegeben ist folgende Häufigkeitsverteilung:

Merkmal	1	3	4	7	9
Häufigkeit	2	6	9	4	12

Ermittle die Summenhäufigkeiten und relativen Häufigkeiten. Gib an, welcher Anteil der Merkmalsausprägungen in den Bereich 1-4 fällt.

Aufgabe 5.3

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Der Übergang von einer metrischen Skala auf eine Ordinalskala bedeutet einen Informationsgewinn.

b) Bei der Kardinalskala ist die lineare Transformation nicht zulässig.

c) Qualitative Merkmale können besonders gut mit einem Histogramm widergegeben werden.

d) Polygonzüge eignen sich besonders zur Darstellung von Zeitreihen.

e) Ein Histogramm ist ein Flächendiagramm.

f) Sind die Merkmalsausprägungen eines Merkmals in reellen Zahlen angegeben, so handelt es sich immer um stetige Merkmale.

Aufgabe 5.4

Berechne zu folgenden Daten die relativen Häufigkeiten, die Summenhäufigkeiten und die Resthäufigkeiten.

Wie viele Ausprägungen fallen zwischen 1 und 5?

Wie viel % der Ausprägungen fallen zwischen 2 und 5?

Merkmal	1	3	4	6	8
Häufigkeit	4	3	13	20	4

Lösungen zu 5.0

Lösung zu 5.1

a) nominal und diskret

b) ordinal und diskret

c) kardinal und stetig (Alter kann in Tagen, Stunden, Minuten,… angegeben werden)

d) kardinal und stetig

e) kardinal und diskret

f) nominal und diskret

g) kardinal und stetig

h) nominal

Lösung zu 5.2

Merkmal	1	3	4	7	9
Häufigkeit	2	6	9	4	12
rel Häufigkeit	6,06%	18,18%	27,27%	12,12%	36,36%
Summenhäufigkeit	6,06%	24,24%	51,52%	63,64%	100,00%

In den Bereich 1-4 fallen damit 51,52% der Merkmalsausprägungen.

Lösung zu 5.3

a) Falsch. Die Information über die Abstände zwischen den Merkmalen geht verloren.

b) Falsch. Die Transformation muss linear sein.

c) Falsch. Das Histogramm eignet sich nur für metrisch messbare Merkmale.

d) Falsch. (Polygonzüge eignen sich eigentlich nur dazu, in Klausuraufgaben Punkte zu sammeln).

e) Richtig.

f) Falsch. Auch diskrete Merkmale können Ausprägungen der reellen Zahlen haben.

Lösung zu 5.4

Merkmal	1	3	4	6	8
Häufigkeit	4	3	13	20	4
rel Häufigkeit	9,09%	6,82%	29,55%	45,45%	9,09%
Summenhäufigkeit	9,09%	15,91%	45,45%	90,91%	100,00%
Restäufigkeit	100,00%	90,91%	84,09%	54,55%	9,09%

6.0 Lageparameter eindimensionaler Verteilungen

6.1 Der Mittelwert

Es gibt verschiedene Arten von Mittelwerten:

- **Den Modalwert/Modus:** Die Merkmalsausprägung, die am häufigsten angenommen wird.

Beispiel:

Merkmalsausprägung	1	3	4	6	8
Häufigkeit	4	3	13	20	4

Modus ist die 6, da sie 20 mal eintritt.

- Den **Zentralwert/Median:** Die Merkmalsausprägung, die die Beobachtungswerte in zwei gleichgroße Gruppen teilt. Ist die Anzahl der Beobachtungswerte gerade, so ermittelt man das arithmetische Mittel (siehe unten) aus den Merkmalsausprägungen der beiden mittleren Beobachtungswerte.

Beispiel:

Merkmalsausprägung	1	3	4	6	8
Häufigkeit	4	3	13	20	4

Es gibt 44 Beobachtungswerte. Der Zentralwert liegt also zwischen dem 22ten und 23ten Beobachtungswert. Beide haben als Merkmalsausprägung die 6. Der Zentralwert ist also 6.

Der Zentralwert eines quantitativen Merkmals hat folgende Eigenschaft: Die Summe der absoluten Abweichungen von einem beliebigen Mittelwert wird minimal, wenn man sie auf den Zentralwert bezieht.

Außerdem ist der Zentralwert unabhängig von den Merkmalsausprägungen am Rand der Verteilung. Es ist egal welche Merkmalsausprägungen die ersten ca.50% oder die zweiten ca.50% annehmen, lediglich die Ausprägung des mittleren Merkmalswertes bzw. der beiden mittleren Merkmalsausprägungen sind wichtig für den Median.

Das erkennt man gut an folgendem **Beispiel:**

Die folgenden Beobachtungswerte haben denselben Median:

Merkmalsausprägung	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit	3	2	1	5	0	0

Merkmalsausprägung	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit	5	0	1	0	0	5

- Arithmetisches Mittel: Es gibt das gewogene und das ungewogene arithmetische Mittel. Wann immer der Zusatz „gewogen“ oder „ungewogen“ weggelassen ist, solltest du von einem „gewogenen“ Paramenter ausgehen.

- Gewogenes arithmetisches Mittel: Die Summe der mit ihren relativen Häufigkeiten gewichteten Merkmalsausprägungen.

- Ungewogenes arithmetisches Mittel: Der Durchschnittswert aller Merkmalsausprägungen. Dabei werden alle Merkmalsausprägungen-unabhängig von ihren Häufigkeiten- gleich gewichtet.

Beispiel:

Merkmalsausprägung	1	3	4	6	8
Häufigkeit	4	3	13	20	4

- Ungewogenes arithmetisches Mittel:

$$\frac{1+3+4+6+8}{5} = 4{,}4$$

- Gewogenes arithmetisches Mittel:

Zunächst ermittelt man die relativen Häufigkeiten:

Merkmalsausprägung	1	3	4	6	8
Häufigkeit	4	3	13	20	4
rel Häufigkeit	9,09%	6,82%	29,55%	45,45%	9,09%

$$1 * 9{,}09\% + 3 * 6{,}82\% + 4 * 29{,}55\% + 6 * 45{,}45\% + 8 * 9{,}09\% = 4{,}93$$

Eigenschaften des (gewogenen) arithmetischen Mittels:

- Die Summe der einfachen Abweichungen der Beobachtungswerte vom arithmetischen Mittel ist Null.

- Die Summe der quadratischen Abweichungen der Beobachtungswerte von einem beliebigen Mittel wird dann minimal, wenn sie sich auf das arithmetische Mittel bezieht.

- Als Parameter für die durchschnittliche Lage der Verteilung eignet sich das arithmetische Mittel umso schlechter, je stärker die Verteilung von den Eigenschaften „Eingipfeligkeit“ und Symmetrie abweicht.

Beispiel: Das arithmetische Mittel hat bei einer Verteilung der Art

Merkmalsausprägung	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit	1	1	5	5	1	1

(Werte zentriert in der Mitte)

eine wesentliche höhere Aussagekraft als zum Beispiel bei folgender Verteilung:

Merkmalsausprägung	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit	5	0	1	0	0	5

(Da die zweite Verteilung 2 Gipfel hat und kaum Ausprägungen in der Mitte liegen, fällt kaum eine Ausprägung auch nur in die Nähe des arithmetischen Mittels.)

Geometrisches und harmonisches Mittel

Das **geometrische Mittel** findet Anwendung um den Mittelwert von Zuwachsraten r (Wirtschaftswachstum, Zinsraten, usw.) zu berechnen. Liegen n Zuwachsraten r_1 bis $r_n$vor, so gilt:

$$\bar{x}_G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1+r_i)} - 1$$

Man multipliziert also alle n Aufzinsungsfaktoren $(1+r)$ und zieht dann die n-te Wurzel (und subtrahiert die 1).

Beispiel:

Das geometrische Mittel der folgenden Zuwachsraten beträgt:

Jahr	1	2	3	4
Zuwachsrate	0,05	0,07	0,3	0,1

$$\bar{x}_G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1+r_i)} - 1 = \sqrt[4]{(1+0{,}05)*(1+0{,}07)*(1+0{,}3)*(1+0{,}1)} - 1 = 0{,}126$$

Sind nicht Zinssätze, sondern Zuwachsfaktoren $(1+r)$ gegeben, kann natürlich direkt mit den Zuwachsfaktoren gerechnet werden.

Das **harmonische Mittel** wird bei Daten verwendet, die als Quotienten oder Anteilswerten vorliegen.

Am besten merkst du dir die Berechnung folgendermaßen:

Der Kehrwert des harmonischen Mittels ist das arithmetische Mittel der Kehrwerte.

Beispiel:

Merkmalsausprägung	1	3	4	6	8
Häufigkeit	4	3	13	20	4

Das ungewogene harmonische Mittel ist dann:

$$\left(\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}}{5}\right)^{-1} = 2{,}67$$

Verwendung findet das harmonische Mittel zum Beispiel bei der Berechnung von Durchschnittsgeschwindigkeiten.

Beim gewogenen hormonischen Mittel werden die Merkmalsausprägungen mit ihren relativen Häufigkeiten gewichtet.

Quantile

Hast du erstmal verstanden was der Median ist, so ist es sehr einfach zu verstehen, was ein Quantil ist:

Beim Median wird gefordert, dass genau 50% der Ausprägungen kleiner sind als der Median. Fordert man, dass z.B. nur 30% der Ausprägungen kleiner sind, so nennt man den Wert 30%-Quantil. Der Median ist also ein 50%-Quantil.

Die speziellen Quantile zu 10% und 25% nennt man Dezile und Quartile.

Box Plot:

Bei einem Box Plot werden zu einer Verteilung 5 Werte grafisch angegeben:

- Das Minimum

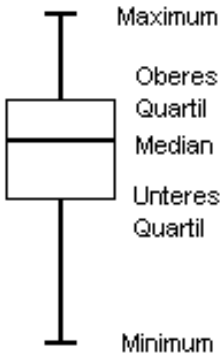
- Das 25%-Quantil

- Der Median

- Das 75% Quantil

- Das Maximum

Grafisch sieht das dann so aus:



Wichtige Eigenschaften der Parameter:

- Ist eine Häufigkeitsverteilung eingipfelig und symmetrisch, dann fallen Modus, Median und arithmetisches Mittel zusammen.

- Ist eine Häufigkeitsverteilung mehrgipfelig und symmetrisch, dann fallen Median und arithmetisches Mittel zusammen.

6.2 Streuungsparameter eindimensionaler Verteilungen

6.2.1 Spannweite

Die Spannweite ist einfach die Differenz zwischen dem Minimum und dem Maximum.

6.2.2 Mittlere absolute Abweichung

Dies ist das arithmetische Mittel aus den absoluten Abweichungen vom Mittelwert.

Beispiel:

Merkmalsausprägung	1	3	4	6	8
Häufigkeit	4	3	13	20	4

Gewogenes arithmetisches Mittel: $4{,}93$

Mittlere absolute Abweichung:

$$\frac{4 * |1 - 4{,}93| + 3 * |3 - 4{,}93| + 13 * |4 - 4{,}93| + 20 * |6 - 4{,}93| + 4 * |8 - 4{,}93|}{44} = 1{,}53$$

6.2.3 Varianz und Standardabweichung

Die Varianz ist die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert. Ähnlich wie die mittlere absolute Abweichung, nur, dass von den Abweichungen nicht der absolute Wert genommen wird, sondern das Quadrat. Sind die Urwerte gegeben, so gilt:

$$\tilde{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Ist eine Häufigkeitsverteilung gegeben, so kann die Varianz mit weniger Rechenschritten berechnet werden:

$$\tilde{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^2 \; h(x_i)$$

Wobei $h(x_i)$ die Häufigkeit des Merkmals x_i bezeichnet und m die Anzahl an verschiedenen Ausprägungen.

Sind relative Häufigkeiten gegeben, so kann die Varianz nach folgender Formel berechnet werden:

$$\tilde{s}^2 = \sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^2 \; f(x_i)$$

Wobei $f(x_i)$ die relative Häufigkeit des Merkmals x_i bezeichnet.

Beispiel:

Merkmalsausprägung	1	3	4	6	8
Häufigkeit	4	3	13	20	4

$$\frac{4 * (1 - 4{,}93)^2 + 3 * (3 - 4{,}93)^2 + 13 * (4 - 4{,}93)^2 + 20 * (6 - 4{,}93)^2 + 4 * (8 - 4{,}93)^2}{44} = 3{,}29$$

Die **Standardabweichung** ist die Wurzel aus der Varianz!

6.2.4 Variationskoeffizient

Der Variationskoeffizient ist der Quotient aus Standardabweichung und arithmetischem Mittel.

$$v = \frac{\tilde{s}}{\bar{x}}$$

Aufgaben zu 6.0

Aufgabe 6.1

Berechne den Modus, den Median, das gewogene arithmetische Mittel, die Varianz und den Variationskoeffizienten zu der folgenden Verteilung:

Merkmal	1	2	3	4	5	6
$h(x)$	2	5	3	5	7	6

Aufgabe 6.2

Berechne das geometrische Mittel der folgenden Daten:

Periode	1	2	3	4	5	6
Zinssatz	5%	4%	7%	2%	8%	9%

Aufgabe 6.3

Berechne das harmonische Mittel der folgenden Werte:

5, 8,6

Aufgabe 6.4

Es werden Waren von 3 verschiedenen Anbietern eingekauft. Die Preise betragen:

Anbieter	1	2	3
Preis €/KG	100	120	150

Bei jedem Anbieter wurde für 6000€ eingekauft.

Berechne den bezahlten Durchschnittspreis.

Aufgabe 6.5

Berechne mittlere absolute Abweichung, maximale Spannweite und das 10% Quantil zu folgenden Daten:

x	1	2	3	4	5	6
$h(x)$	1	3	5	12	11	8

Aufgabe 6.6

Gegeben sind n Merkmalsausprägungen eines quantitativen Merkmals. Welche der folgenden Aussagen sind wahr:

a) Die Summe der Abstandsquadrate von einem beliebigen Wert x_0 wird minimal, wenn für x_0 das gewogene arithmetische Mittel gewählt wird.

b) Die Summe der einfachen Abweichungen der Beobachtungswerte vom arithmetischen Mittel ist Null.

c) Ist eine Häufigkeitsverteilung mehrgipfelig und symmetrisch, dann fallen Modus, Median und arithmetisches Mittel zusammen.

d) Die Varianz berücksichtigt Ausreißer stärker als die mittlere absolute Abweichung.

e) Die Spannweite ist ein sinnvoller Streuungsparameter für nominale Merkmale.

f) Die Spannweite ist die Differenz aus Minimum und Modus.

g) Verschiebt man die obersten 25% der Merkmalsausprägungen um 1% nach oben, so ändert sich die Lage des Medians entsprechend.

Aufgabe 6.7

Aus einer Auswertung einer Menge von Beobachtungswerten seien die folgenden Ergebnisse bekannt:

$s = 10$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 500$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 20$$

Leite aus den Werten den Stichprobenumfang n her.

Aufgabe 6.8

Für welche Fragestellungen eignet sich das harmonische Mittel als Lageparameter?

a) Durchschnittsgeschwindigkeit eines Autos, das von A nach B mit 100km/h und zurück mit 120 km/h fährt.

b) Durchschnittsnote bei der Statistikklausur.

c) Durchschnittliche Wasserverbrauch in Liter/Monat.

d) Sparguthaben wird über 4 Jahre zu verschiedenen Zinsen angelegt. Gesucht ist der durchschnittliche Zinssatz.

e) Keine der angegebenen Fragestellungen.

Aufgabe 6.9

Welche der folgenden Aussagen sind richtig:

a) Eine Verteilung kann durch die Varianz und den Mittelwert eindeutig bestimmt werden.

b) Wird eine statistische Reihe $x_1 \dots x_n$um x_{n+1} erweitert, so gilt für das neue gewogene arithmetische Mittel: $\bar{x}_{neu} = \frac{1}{n+1}(x_{n+1} + \bar{x}_{alt})$.

c) Die Stichprobenvarianz ist das Quadrat des durchschnittlichen Abstandes der Einzelwerte vom Mittelwert.

d) Ist der Modalwert (Modus) ungleich dem Mittelwert, so ist die Verteilung nicht symmetrisch.

Lösungen zu 6.0

Lösung zu 6.1

- Modus: 5 (Tritt am häufigsten auf)

- Median: Man schreibt zunächst die Merkmalsausprägungen einzeln auf:
1,1,2,2,2,2,2,3,3,3,4,4,4,4,4,5,5,5,5,5,5,5,6,6,6,6,6,6

Insgesamt sind das 28 Merkmalsausprägungen. Der Median liegt also zwischen dem 14. und 15. Wert. Dies ist die 4.

- Gewogenes arithmetisches Mittel:

Man stellt zunächst folgende Tabelle auf:

							Summe
Merkmal	1	2	3	4	5	6	
$h(x)$	2	5	3	5	7	6	28
$h(x) * x$	2	10	9	20	35	36	112

Das arithmetische Mittel beträgt nun $112/28 = 4$

- Varianz:

Man stellt zunächst folgende Tabelle auf:

Merkmalsausprägung x	1	2	3	4	5	6	Summe
$h(x)$	2	5	3	5	7	6	28
$\bar{x}$	4	4	4	4	4	4	
$x - \bar{x}$	-3	-2	-1	0	1	2	
$(x - \bar{x})^2$	9	4	1	0	1	4	
$(x - \bar{x})^2 * h(x)$	18	20	3	0	7	24	72

Die Varianz beträgt $72/28 = 2{,}57$.

- Variationskoeffizient:

Die Standardabweichung beträgt:

$\sqrt{2{,}57} = 1{,}6.$

Der Variationskoeffizient beträgt:

$v = \frac{1{,}6}{4} = 0{,}4.$

Lösung zu 6.2

Geometrisches Mittel:

$$\bar{x}_G = \sqrt[6]{1{,}05 * 1{,}04 * 1{,}07 * 1{,}02 * 1{,}08 * 1{,}09} - 1 = 5{,}8\%$$

Lösung zu 6.3

Der Kehrwert des harmonischen Mittels ist das arithmetische Mittel der Kehrwerte.

Schritt 1: Bildung der Kehrwerte:

$$\frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{6}$$

Schritt 2: Ermittlung des arithmetischen Mittels der Kehrwerte:

$$\frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6}}{3} = 0{,}164$$

Bildung des Kehrwertes des arithmetischen Mittels:

$$\frac{1}{0{,}164} = 6{,}1$$

Lösung zu 6.4

Bei diesen Aufgabentypen kannst du streng nach Formel vorgehen, oder - falls du die Formel vergessen hast - die Aufgabe „logisch“ lösen.

Der Trick liegt bei diesen Fragestellungen darin, dass nicht dieselben Mengen gekauft wurden, sondern nur dieselben Beträge bezahlt wurden. Du musst also zunächst ermitteln, wieviel kg bei welchem Anbieter gekauft wurden.

Anbieter 1: 6000€ zu 100€ pro kg, also wurden 60 kg gekauft.

Anbieter 2: 6000€ zu 120€ pro kg, also wurden 50kg gekauft.

Anbieter 3: 6000€ zu 150€ pro kg, also wurden 40kg gekauft.

Der Durchschnittspreis ergibt sich jetzt zu

$$\frac{60 * 100 + 50 * 120 + 40 * 150}{60 + 50 + 40} = 120$$

Lösung zu 6.5

- Absolute Abweichung: Zunächst wird der (gewogene arithmetische) Mittelwert mit 4,325 berechnet.

Die folgende Tabelle zeigt die absoluten Abweichungen vom Mittelwert (Achtung: Vergiß nie, dass es absolute Abweichungen sind - also alle positiv!):

x	1	2	3	4	5	6	Summe
$h(x)$	1	3	5	12	11	8	40
$\bar{x}$	4,325	4,325	4,325	4,325	4,325	4,325	
$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	3,325	2,325	1,325	0,325	0,675	1,675	
$\lvert x_i - \bar{x}\rvert * h(x)$	3,325	6,975	6,625	3,9	7,425	13,4	41,65

Die absolute Abweichung ergibt sich damit zu $\frac{41{,}65}{40} = 1{,}04$.

- Maximale Spannweite: $6 - 1 = 5$ (Wenn es in der Klausur Punkte geschenkt gibt, solltest du sie annehemen!)

- 10%-Quantil: Es gibt 40 Merkmalsausprägungen. Das 10%-Quantil liegt also zwischen dem 4ten und 5ten Merkmalswert. Der 4te ist die 2 und der 5te ist die 3. Das 10%-Quantil ist der Mittelwert von 2,5.

Lösung zu 6.6

a) Richtig.

b) Richtig.

c) Falsch, nur Median und arithmetisches Mittel fallen zusammen.

d) Richtig. Die Differenzen werden quadriert.

e) Falsch. Bei nominalen Merkmalen kann die Differenz nicht quantifiziert werden.

f) Falsch. Sie ist die Differenz aus Minimum und Maximum.

g) Falsch. Die Lage des Medians ist von den Merkmalsausprägungen an den Rändern nicht betroffen.

Lösung zu 6.7:

Benötigt wird die Formel für die Varianz:

$$\tilde{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Diese kann man umformen zu

$$\tilde{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$$

(Der Ausdruck $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$ ist der Mittelwert.)

Nun kann man die gegebenen Werte einsetzen:

$$100 = \frac{1}{n}500 - \left(\frac{1}{n}20\right)^2 = \frac{1}{n}500 - 400\frac{1}{n^2}$$

$$100n^2 = 500n - 400$$

$$n^2 = 5n - 4$$

$$n^2 - 5n + 4 = 0$$

Diese Gleichung ist für $n = 4$ und $n = 1$ erfüllt. Beides sind gültige Lösungen.

Lösung zu 6.8

Das harmonische Mittel eignet sich immer, wenn die Daten als Quotient gegeben sind. Antworten a und c sind richtig. Für b wäre das arithmetische Mittel und für d das geometrische aussagekräftig.

Lösung zu 6.9

a) Falsch. Man kann durch diese Werte nicht auf die genaue Verteilung schliessen.

b) Falsch. Richtig wäre $\overline{x}_{neu} = \frac{1}{n+1}(x_{n+1} + n * \bar{x}_{alt})$.

c) Falsch. Es ist der Durchschnitt der quadrierten Abweichungen der Einzelwerte von ihrem Mittelwert (erst die Differenzen quadrieren, dann den Durchschnitt bilden).

d) Falsch. Eine Verteilung kann symmetrisch und mehrgipfelig sein. Dann ist der Modus nicht eindeutig bestimmbar, liegt aber auf keinem Fall beim Mittelwert.

7. 0 Häufigkeitsverteilungen zweier Merkmale

7.1 Einführung

In diesem Kapitel wird der Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen untersucht. Zunächst wird der Zusammenhang zwischen zwei quantitativen Merkmalen untersucht, später der Zusammenhang zwischen nominal messbaren Merkmalen.

Beispiele für den Zusammenhang quantitativer Merkmale sind:

- Abiturnote und Note des Universitätsabschlusses

- Intelligenzquotient und Jahreseinkommen

- Menge an Alkohol, der jährlich konsumiert wird und Lebensdauer

- Einkommen der Eltern und Schulnotendurchschnitt

Der Zusammenhang kann natürlich positiv oder negativ sein und verschieden stark ausgeprägt sein. So kann es sein, dass eine gute Abiturnote zu guten Universitätsnoten führt, es kann aber auch sein, dass es keinen oder einen negativen Zusammenhang zwischen Abiturnote und Universitätsnoten gibt.

Interessant ist auch die Interpretation des Zusammenhangs: Besteht zum Beispiel ein positiver Zusammenhang zwischen dem jährlichen Alkoholkonsum und dem Lebensalter, so muss das nicht heißen, dass viel Saufen das Leben verlängert. Es bedeutet eher, dass alte Menschen einfach mehr Alkohol trinken und somit ihr durchschnittlicher Alkoholkonsum steigt.

Formal schreibt man für die absoluten Häufigkeiten eines Merkmals $h(x)$ und für die relative Häufigkeit $f(x)$.

x	1	2	3	4	5	6
$h(x)$	2	3	4	5	3	1
$f(x)$	11,11%	16,67%	22,22%	27,78%	16,67%	5,56%

7.2 Darstellungsformen

Es gibt nun verschiedene Möglichkeiten den Zusammenhang zwischen zwei quantitativen Merkmalen darzustellen. Das Fernuni Skript benennt drei Methoden:

- Das Streuungsdiagramm

- Das zweidimensionale Säulendiagramm

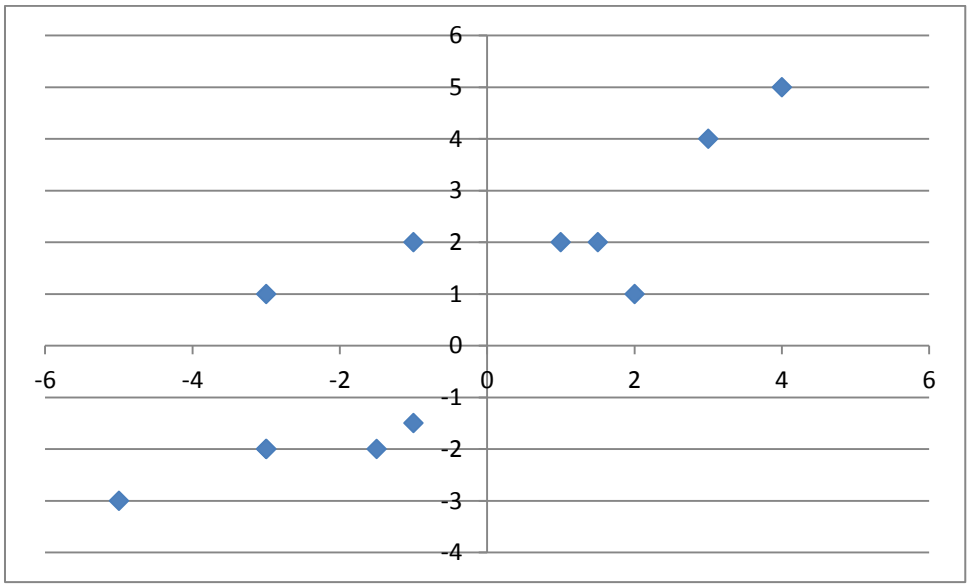
- Das dreidimensionale Säulendiagramm

Dabei werden einfach nur die Daten der beiden Verteilungen grafisch wiedergegeben. Einen positiven Zusammenhang erkennt man, wenn große (kleine) Ausprägungen des einen Merkmals mit großen (kleinen) Ausprägungen des anderen Merkmals einhergehen. Bei negativem Zusammenhang gehen entsprechend mit kleinen Ausprägungen des einen Merkmals große Ausprägungen des anderen Merkmals einher.

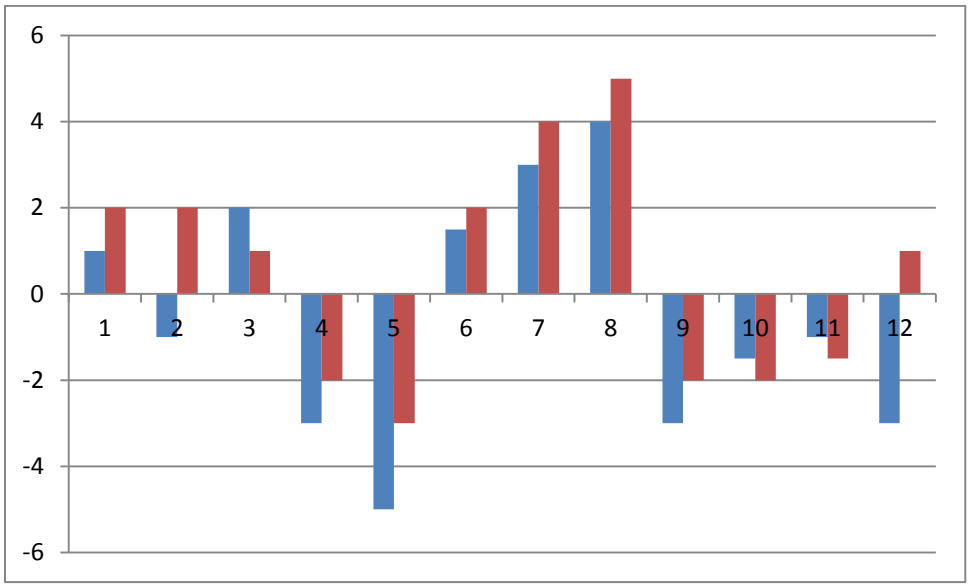
Beispiel:

Die Daten der folgenden beiden Grafiken haben einen positiven Zusammenhang. Hohe (niedrige) X-Werte gehen tendenziell mit hohen (niedrigen) Y-Werten einher.

Streuungsdiagramm:



Balkendiagramm:



7.3 Randverteilungen

Aus einer tabellarischen Darstellung zweier Merkmale kann man über die Spalten- bzw. Zeilensummen die Randverteilungen ermitteln. Diese Randverteilungen sind die Verteilungen der einzelnen Merkmale ohne Berücksichtigung des jeweils anderen Merkmals.

Beispiel:

Die gemeinsame Verteilung der beiden Merkmale

$X =$ Stundenaufwand für die Klausur (in 100)

$Y =$ Klausurnote

$Y \backslash X$	2	4	6	8	10	Summe
1	7,3	6	4,4	2,8	1,4	21,9
2	8,7	7	5,3	3,5	1,7	26,2
3	5,3	5,3	5,3	5,3	5,3	26,5
4	0,8	1,7	2,6	3,5	4,4	13
5	0,5	1,1	1,7	2,3	2,8	8,4
6	0,2	0,5	0,8	1,1	1,4	4
Summe	22,8	21,6	20,1	18,5	17	100

Die Randverteilung des Merkmals X ist:

x	2	4	6	8	10
$h(x)$	22,8	21,6	20,1	18,5	17

Die Randverteilung des Merkmals Y ist:

y	1	2	3	4	5	6
$h(y)$	21,9	26,2	26,5	13	8,4	4

7.4 Bedingte Verteilung

Die bedingte Verteilung ist die Verteilung des einen Merkmals unter der Bedingung, dass das andere Merkmal einen bestimmten Wert annimmt. Formal schreibt man: $h(x|y_k)$ (gesprochen h von x gegeben y_k).

Beispiel: Nehmen wir die Daten aus Beispiel 3.3. Die Bedingte Verteilung für X gegeben $y = 4$ ist:

x	2	4	6	8	10
$h(x\|y = 4)$	0,8	1,7	2,6	3,5	4,4

Zu jeder Randverteilung kann man dann auch die relative Häufigkeit bestimmen.

$f(x|y = 4)$ ist zum **Beispiel:**

$$\frac{1{,}7}{0{,}8 + 1{,}7 + 2{,}6 + 3{,}5 + 4{,}4} = 13\%$$

7.5 Parameter zweidimensionaler Häufigkeitsverteilungen

Mittelwert und Varianz

Für die Ausprägungen zweier Merkmale kann man die Mittelwerte und Streuungen nur für die bedingten Verteilungen ermitteln. Die Methoden unterscheiden sich in keiner Weise von denen der eindimensionalen Parameter, nur die Verteilung ist eine andere.

Der Mittelwert von X gegeben $y = 4$ ist

$$\frac{(0{,}8 * 2 + 1{,}7 * 4 + 2{,}6 * 6 + 3{,}5 * 8 + 4{,}4 * 10)}{0{,}8 + 1{,}7 + 2{,}6 + 3{,}5 + 4{,}4} = 7{,}38$$

Kovarianz

Ein wichtiger Parameter zweidimensionaler Merkmalsausprägungen ist die sogenannte Kovarianz. Die Kovarianz ist ein Parameter für die positive oder negative Abhängigkeit der beiden Merkmale.

Mathematisch wird die Kovarianz wie folgt ermittelt:

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r}(x_i - \bar{x}) * (y_k - \bar{y}) * h(x_j, y_k)$$

Man kann zur Berechnung auch die relativen Häufigkeiten verwenden:

$$Cov(X,Y) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r}(x_i - \bar{x}) * (y_k - \bar{y}) * f(x_j, y_k)$$

Es ist wichtig, dass du verstehst, was hier berechnet wird: Es wird das Produkt aus den Abweichungen der jeweiligen Ausprägungen von ihren Mittelwerten gebildet. Dieses Produkt wird mit seiner relativen Häufigkeit multipliziert und diese Produkte werden aufsummiert. Wenn also das zweite Merkmal immer dann nach oben von seinem Mittelwert abweicht, wenn auch das erste nach oben abweicht (und entsprechend immer nach unten, wenn auch das erste nach unten abweicht), dann ist das Produkt immer positiv und die Summe über alle Produkte wird größer. Weicht das zweite Merkmal nach unten von seinem Mittelwert ab, wenn das erste nach oben abweicht (und entsprechend andersrum), so wird das Produkt negativ und die Summe der Produkte entsprechend kleiner.

Beispiel: Die Kovarianz der folgenden Werte berechnet sich wie folgt:

X	1	5	6
Y	2	4	6

Zunächst werden die Mittelwerte ermittelt:

$$\bar{x} = \frac{1+5+6}{3} = 4$$

$$\bar{y} = \frac{2+4+6}{3} = 4$$

Dann ist die Kovarianz:

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{3}\big((1-4)*(2-4)*1 + (5-4)*(4-4)*1 + (6-4)*(6-4)*1\big) = \frac{10}{3}$$

Es ist wichtig zu sehen, dass die absolute Höhe der Kovarianz keine Aussage über das Maß des Zusammenhangs der beiden Merkmale macht. Für die einzelne Stichprobe gilt natürlich: Je höher die Kovarianz, desto höher der Zusammenhang, aber alleine aus der Aussage: „Kovarianz 5“ kann man nicht ablesen ob ein starker oder ein schwacher Zusammenhang besteht.

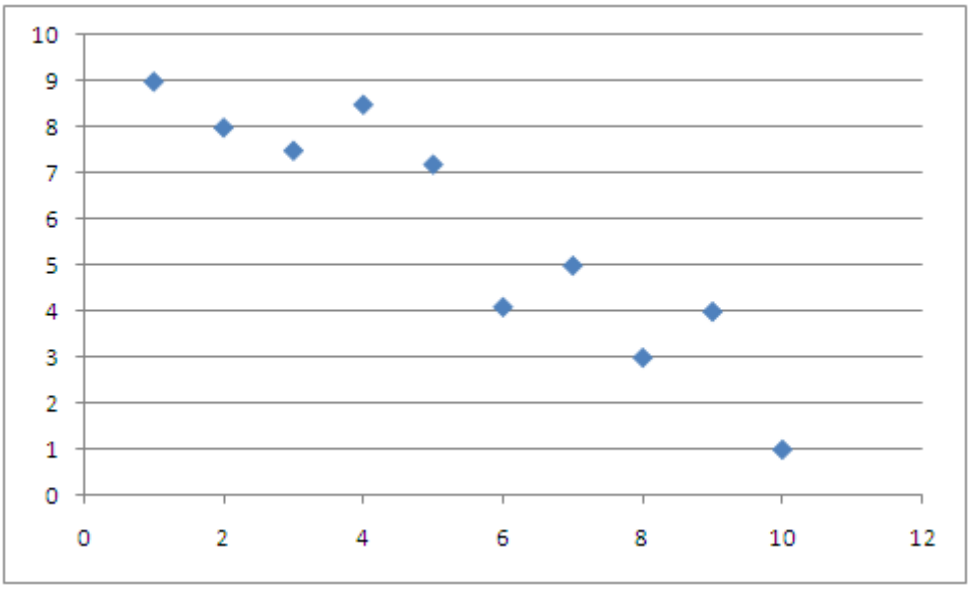
Folgendes **Beispiel** soll dies verdeutlichen:

Wir nehmen die Werte des letzten Beispiels und multiplizieren diese mit 2. Der Zusammenhang bleibt dabei völlig unbeeinflusst und trotzdem steigt der Wert der Kovarianz. (Die Berechnung überlasse ich dir).

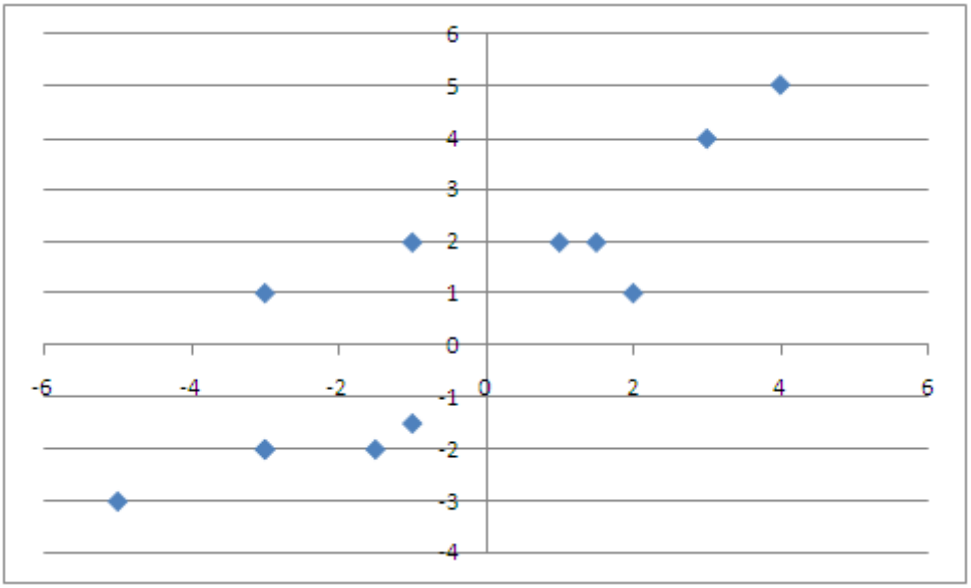
7.6 Unabhängige und abhängige Merkmale

Ob zwei Merkmale voneinander abhängig sind, kann man gut grafisch anhand des Streuungsdiagramms erkennen:

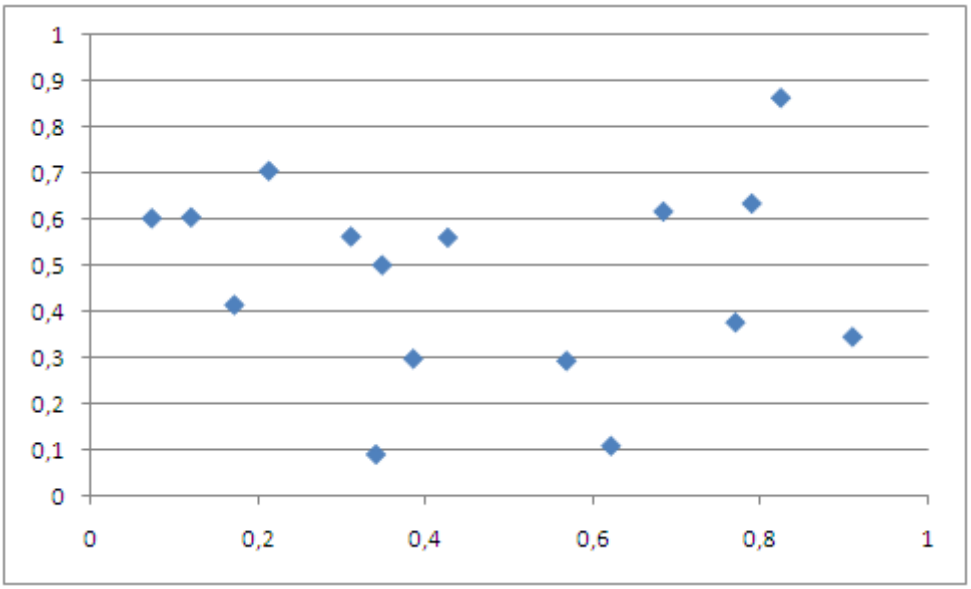
Negative Abhängigkeit:



Positive Abhängigkeit:



Unabhängigkeit:



Die Unabhängigkeit zweier Merkmale kann auch anhand der bedingten Verteilungen überprüft werden. Sollte die Ausprägung des Merkmals A keine Auswirkung auf die Ausprägung des Merkmals B haben, so ist die relative Verteilung des Merkmals B gleich der bedingten relativen Verteilung des Merkmals B für alle Ausprägungen des Merkmals A. Um den Satz zu verstehen, hier ein **Beispiel:**

Angenommen die Abiturnote (Merkmal A) und die Universitätsnote sind voneinander unabhängig. Dann gilt: Betrachte ich alle Universitätsnoten von StudentInnen mit einer Abiturnote von 1 und vergleiche diese mit den Universitätsnoten von StudentInnen mit der Abinote 2, so gibt es keinen Unterschied. Für beliebige Abinoten ändert sich die relative Verteilung der Universitätsnoten nicht!

Wären die beiden Merkmale positiv voneinander abhängig, so würde die relative Verteilung der Universitätsnoten der StudentInnen mit Abinote 1 besser sein als die relative Verteilung der Universitätsnoten der StudentInnen mit Abinote 2.

Formal schreibt man:

$$f(x|y_k)$$

Da die Verteilung von X unabhängig von der speziellen Ausprägung von y_k ist, ist natürlich auch die spezielle Ausprägung von X unabhängig. Formal schreibt man

$$f(x_j|y_k)$$

Nach der Bestimmung ob es einen Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen gibt, muss noch bestimmt werden welcher Art dieser ist (Kapitel 7.7 Regressionsrechnung) und wie stark der Zusammenhang ist (Kapitel 7.8 Korrelationsrechnung).

7.7 Regressionsrechnung

Bestimmung der Art des Zusammenhangs.

Hat man festgestellt, dass ein Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen existiert, so gilt es diesen quantitativ zu messen. Eine Möglichkeit ist es, eine Funktion zu schätzen, die das eine Merkmal in Abhängigkeit des anderen abbildet. So eine Funktion nennt man Regressionsfunktion. Da der Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen verschiedene Formen annehmen kann, ist auch eine Vielzahl von Regressionsfunktionen denkbar.

Ein sehr einfacher Fall ist der lineare Zusammenhang zweier Funktionen.

Beispiel: Es wird bei 1000 Unternehmen einer Branche Marketingausgaben und Einnahmen ermittelt. Für jeden Euro, den man in Marketing investiert, erhöhen sich die Einnahmen um 90 Cent. Formal lautet die Funktion:

$$f(x) = 0{,}9x$$

Es ist auch eine quadratische Abhängigkeit denkbar: Der Bremsweg steigt mit dem Quadrat der Geschwindigkeit:

$$f(x) = x^2$$

Und natürlich auch Kombinationen aus verschiedenen Funkionen!

Allgemein gilt es also, für eine gegebene Gleichung (zum Beispiel: $f(x) = ax + bx^2$) die Koeffizienten a und b mittels Regressionsrechnung zu bestimmen.

Bei der Regressionsrechnung wird der Typ der Regressionsfunktion vorgegeben. Man kann den Typ der Regressionsfunktion oft aus dem Streuungsdiagramm schätzen (auch wenn dies nicht klausurrelevant sein wird). Mittels der Regressionsrechnung werden dann die Parameter geschätzt.

Als Schätzverfahren wird die sogenannte „Methode der Kleinsten Quadrate“ genutzt. Bei dieser Methode werden die Koeffizienten der Regressionsfunktion so gewählt, dass die Summe der quadrierten Abweichungen zwischen der Regressionsfunktion und den Daten minimal wird (Zahlenbeispiele folgen in Kapitel 7.7.1).

Da es positive und negative Abweichungen gibt, würden diese sich gegenseitig aufheben, wenn man fordern würde, dass die Summe der Abweichungen minimal werden soll. Durch das Quadrieren werden positive und negative Abweichungen gleich behandelt, besonders hohe werden aber auch besonders stark gewichtet.

Es wird zwischen der linearen Kleinste Quadrate Regression und der Nichtlinearen Kleinste Quadrate Regression unterschieden.

7.7.1 Lineare Kleinste Quadrate Regression

Für den relativ einfachen Fall der linearen Kleinste Quadrate Regression müssen die Koeffizienten der Gleichung

$$f(x) = a + bx$$

geschätzt werden. Im Folgenden werde ich die folgende Notation für die Regressionsgleichung verwenden:

$$\hat{y} = a + bx$$

Das Dach über dem y zeigt an, dass es sich um eine Schätzung handelt und nicht um eine tatsächliche Ausprägung.

Die Schätzung der Koeffizienten geschieht folgendermaßen:

Die Summe der quadrierten Abweichungen zwischen der Regressionsfunktion und den Ausprägungen beträgt

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2$$

(n steht immer für den Stichprobenumfang)

Dieser Ausdruck wird minimal, wenn die ersten Ableitungen nach a und b gleich Null sind.

Ich verzichte an dieser Stelle auf die mathematische Herleitung, da diese höchstwahrscheinlich nicht abgeprüft wird. Wichtig ist, zu wissen, dass der Ausdruck $\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2$ minimal wird, wenn die ersten Ableitungen nach a und b Null sind.

Indem man die ersten Ableitungen nach a und b gleich Null setzt, erhält man ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten. Die Lösung dieses Gleichungssystems ist:

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

Beispiel:

Zu den folgenden Wertepaaren sollen die Regressionskoeffizienten der Regressionsfunktion

$$\hat{y} = a + bx$$

geschätzt werden.

x	2	2	6	6
y	2	6	4	8

Es müssen zunächst die folgenden Werte ermittelt werden:

$$\bar{x} = 4$$

$$\bar{y} = 5$$

$$\sum x_i y_i = 2 * 2 + 2 * 6 + 6 * 4 + 6 * 8 = 88$$

$$\sum x_i^2 = 2 * 2 + 2 * 2 + 6 * 6 + 6 * 6 = 80$$

Eingesetzt in $a = \bar{y} - b\bar{x}$ und $b = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}$ erhält man:

$$a = 5 - 4b$$

$$b = \frac{88 - 4 * 4 * 5}{80 - 4 * 4 * 4} = \frac{8}{16} = 0{,}5$$

$$a = 3$$

Interpretation der Regressionskoeffizienten: Wie bei jeder Funktion gibt das Absolutglied a der Funktion

$$\hat{y} = a + bx$$

die Lage des Funktionsgraphen an, und der Koeffizient b gibt die Steigung des Funktionsgraphen an.

7.7.2 Nichtlineare Kleinste-Quadrate-Regression

Bei der nichtlinearen Kleinste-Quadrate-Regression ist der Zusammenhang zwischen x und y nicht linear. Die Regressionsgleichung kann also eine Vielzahl von Formen annehmen. Hier ein paar häufige **Beispiele:**

1) Parabelform:

$$\hat{y} = a + bx + cx^2$$

Um die Koeffizienten zu schätzen, geht man genauso vor, wie bei linearen Funktionen. Da es aber drei Koeffizienten gibt, müssen auch drei Ableitungen - nach a, b und c- gebildet werden und diese müssen gleichgesetzt werden und jeweils Null ergeben. Man erhält also ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten.

Für Regressionsgleichungen höheren Grades steigt auch die Anzahl an Koeffizienten und damit an Gleichungen im Gleichungssystem, der Lösungsweg bleibt aber immer derselbe.

2) Exponentialfunktion:

$$\hat{y} = ab^x$$

3) Potenzfunktion:

$$\hat{y} = ax^b$$

Regressionsfunktionen vom Typ 2) und 3) müssen zunächst logarithmiert werden und können dann als lineare Regressionsgleichungen wie unter 7.7.1 gelöst werden.

Aus 2) ergibt sich nach Logarithmieren:

$$\log \hat{y} = \log a + x * \log b$$

Aus 3) ergibt sich nach Logarithmieren:

$$\log \hat{y} = \log a + b * \log x$$

Bisher sind in Klausuren ausschließlich Rechenaufgaben für lineare Regressionsgleichungen vorgekommen. Im SS2010 kam zuerst eine Regressionsgleichung der Form

$$\hat{y} = a + bx + cx^2$$

drann, wobei aber die Koeffizienten gegeben waren. Es ist also wichtig, dass du verstanden hast, wie die nichtlineare Regressionsrechnung funktioniert. Bei der Schätzung der Koeffizienten solltest du den Lernschwerpunkt aber auf lineare Regressionsfunktionen legen.

7.8 Korrelationsrechnung

Bestimmung der Stärke des Zusammenhangs.

Bei der Bestimmung der Stärke des Zusammenhangs zweier Merkmale muss zwischen linearem Zusammenhang und nichtlinearem Zusammenhang unterschieden werden.

7.8.1 Korrelation zweier Merkmale mit linearem Zusammenhang

Der lineare Zusammenhang zwischen zwei **quantitativen** Merkmalen wird über den **Pearsonschen Korrelationskoeffizienten** gemessen. Um aus der Kovarianz (siehe Kapitel 7.5) eine aussagefähige Maßzahl zu berechnen, wird diese durch das Produkt der Standardabweichungen der beiden Merkmale geteilt. Wie in Kapitel 7.5 erläutert, steigt die Kovarianz einerseits mit dem Zusammenhang der beiden Merkmale, aber auch proportional mit ihren Standardabweichungen. Da wir uns nur für den Zusammenhang interessieren, werden die Standardabweichungen eliminiert (indem durch die Standardabweichungen geteilt wird). Mathematisch schreibt man:

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\tilde{s}_x * \tilde{s}_y}$$

Wobei $\tilde{s}_y$ für die geschätzte Standardabweichung des Merkmals Y steht.

Nachdem die Standardabweichungen eliminiert wurden, ergibt sich eine Maßzahl für die Stärke des linearen Zusammenhangs, die zwischen -1 und 1 liegt. Ein Pearsonscher Korrelationskoeffizient von 1(-1) bedeutet dabei, dass die beiden Merkmale perfekt positiv (negativ) zusammenhängen (korreliert sind). Bei einem Korrelationskoeffizienten von 0 sind sie unkorreliert.

Beispiel: Folgende Tabelle stellt die wöchentlichen Renditen von 2 Aktien dar. Berechne den Pearsonschen Korrelationskoeffizienten.

Aktie A (A)	5	2	-1	2	12
Aktie B (B)	3	1	-2	-1	4

Hierzu berechnet man zunächst die Standardabweichungen der beiden Merkmale, sowie deren Kovarianz:

$$\tilde{s}_A = 4{,}43$$

$$\tilde{s}_B = 2{,}28$$

$$Cov(A,B) = 9$$

Eingesetzt in $r = \frac{Cov(X,Y)}{\tilde{s}_x * \tilde{s}_y}$ ergibt:

$$\frac{9}{4{,}43 * 2{,}28} = 0{,}89$$

Bestimmtheitsmaß

Das Bestimmtheitsmaß ist das Quadrat des Pearsonschen Korrelationskoeffizienten. Wie man mathematisch zeigen kann (Herleitung siehe Fernuni-Skript), entspricht das Bestimmtheitsmaß dem Quotienten aus der Varianz der durch lineare Regression geschätzten Y-Werte und der Varianz der beobachteten Y-Werte.

$$r^2 = \frac{\tilde{s}_{\hat{y}}^2}{\tilde{s}_y^2}$$

Interpretation des Bestimmtheitsmaßes

Das Bestimmtheitsmaß gibt an, welcher Anteil an Streuung (Varianz) der beobachteten Y-Werte durch die Varianz der geschätzten Y-Werte erklärt wird. Der Ausdruck „erklärt“ ist etwas hier etwas missverständlich. Es soll bedeuten, dass dieser Anteil an Varianz durch den Einfluss des Merkmals X herbeigeführt wird. Angenommen das Merkmal Y hängt zu 50% von dem Merkmal X ab und zu 50% von einem dritten unbekannten Merkmal. In diesem Fall würde das Bestimmtheitsmaß bezüglich X und Y 50% (0,5) betragen.

Hängt Y ausschließlich von X ab, so beträgt das Bestimmtheitsmaß 1. Da die gesamte Änderung des Merkmals Y von der Änderung des Merkmals X abhängt, liegen alle tatsächlich beobachteten Werte auch auf der Regressionsgerade.

7.8.2 Korrelation zweier Merkmale mit nichtlinearem Zusammenhang

Da der Pearsonsche Korrelationskoeffizient für Merkmale mit nichlinearem Zusammenhang **nicht** nach der Formel

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\tilde{s}_x * \tilde{s}_y}$$

berechnet werden kann, muß er aus dem Bestimmtheitsmaß ermittelt werden. Da gilt

$$r^2 = \frac{\tilde{s}_{\hat{y}}^2}{\tilde{s}_y^2},$$

muss dafür $\tilde{s}_{\hat{y}}^2$ durch nichtlineare Kleinste-Quadrate-Regression (siehe Kapitel 7.7.2) ermittelt werden. Der Pearsonsche Korrelationskoeffizient ergibt sich dann aus der Wurzel des Bestimmtheitsmaßes.

7.9 Spearmansche Rangkorrelationskoeffizient

Sollten Merkmale nicht quantitativ, sondern nur ordinal, also dem Rang nach, sortiert werden können, so kann die Korrelation der beiden Merkmale durch den Spearmanschen Rangkorrelationskoeffizienten ermittelt werden.

Der Spearmansche Rangkorrelationskoeffizient ist eigentlich nichts weiter als der Pearsonsche Korrelationskoeffizient, nur dass statt der quantitativen Merkmalsausprägungen die Rangzahlen genommen werden. Man kann beide Koeffizienten auch für beide Arten von Merkmalsausprägungen nutzen - die Aussagekraft ist dann aber geringer.

Mathematisch schreibt man:

$$r_s = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(rg(x_i) - \overline{rg}_X\right)\left(rg(y_i) - \overline{rg}_Y\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(rg(x_i) - \overline{rg}_X)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(rg(y_i) - \overline{rg}_Y\right)^2}}$$

Haben mehrere Beobachtungswerte denselben Wert, so nennt man diese **Bindungen**. Für diese Werte wird der durchschnittliche Rang der entsprechenden Ränge vergeben. Das folgende Beispiel verdeutlicht das Vorgehen bei Bindungen:

Beispiel:

5 Studenten treten im 100 Meter Sprint und im Weitsprung gegeneinander an. Es werden folgende Zeiten/Weiten erzielt:

Student Nr.	1	2	3	4	5
Sprint (X)	12,4	12,2	15	12,4	13,2
Weitsprung (Y)	4	4,5	5,2	6	6,2

Der Spearmansche Rangkorrelationskoeffizient berechnet sich nun wie folgt:

Zunächst müssen die Ränge berechnet werden:

Student Nr.	1	2	3	4	5
Sprint (X)	2,5	1	5	2,5	4
Weitsprung (Y)	5	4	3	2	1

Da beim Sprint zwei Studenten dieselbe Zeit haben, liegen Bindungen vor. Beide erhalten als Rangzahl das arithmetische Mittel der beiden zu vergebenen Ränge. Nun müssen die Mittelwerte ermittelt werden:

$$\overline{rg}_X = \overline{rg}_Y = 3$$

Nun müssen die Werte nur noch in die Formel für den Spearmanschen Rangkorrelationskoeffizienten eingesetzt werden. Im einzelnen ergibt sich:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(rg(x_i)-\overline{rg}_X\right)\left(rg(y_i)-\overline{rg}_Y\right) = (2{,}5-3)*(5-3)+(1-3)*(4-3)+(5-3)*(3-3)+(2{,}5-3)*(2-3)+(4-3)*(1-3)=-4{,}5$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(rg(x_i)-\overline{rg}_X\right)^2 = 9{,}5$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(rg(y_i)-\overline{rg}_Y\right)^2 = 10$$

$$\frac{-4{,}5}{\sqrt{9{,}5*10}} = -0{,}46$$

Also ein negativer Zusammenhang.

Liegen keine Bindungen vor, so vereinfacht sich die Berechnung von r_s zu:

$$r_s = 1-\frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)}$$

Wobei d_i den Rangdifferenzen $rg(x_i)-rg(y_i)$ entspricht.

7.10 Kontingenz

Die Kontingenz beschreibt die Abhängigkeit zwischen nominal messbaren Merkmalen.

Zur Ermittlung der Kontingenz wird folgende Kontingenztabelle mit den nominalen Merkmalen, ihren absoluten Häufigkeiten und Randverteilungen aufgestellt:

	y_1	y_2	…	y_r	Randverteilung
x_1	$h(x_1, y_1)$	$h(x_1, y_2)$	…	$h(x_1, y_r)$	$h(x_1) = \sum_{k=1}^{r} h(x_1, y_k)$
x_2	$h(x_2, y_1)$	$h(x_2, y_2)$	…	$h(x_2, y_r)$	$h(x_2) = \sum_{k=1}^{r} h(x_2, y_k)$
…	…	…	…	…	…
x_m	$h(x_m, y_1)$	$h(x_m, y_2)$	…	$h(x_m, y_r)$	$h(x_m) = \sum_{k=1}^{r} h(x_m, y_k)$
Randverteilung	$h(y_1) = \sum_{j=1}^{m} h(x_j, y_1)$	$h(y_2) = \sum_{j=1}^{m} h(x_j, y_2)$	…	$h(y_r) = \sum_{j=1}^{m} h(x_j, y_r)$	n

Aus der Tabelle berechnet man die Hilfsgröße

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{r} \frac{\left(h(x_j, y_k) - \frac{h(x_j) * h(y_k)}{n}\right)^2}{\frac{h(x_j) * h(y_k)}{n}}$$

Ein Maß für den Zusammenhang zwischen nominal messbaren Merkmalen ist dann der Kontingenzkoeffizient:

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}}$$

Versuche nicht das zu verstehen - Hier heißt es: Auswendig lernen!

Beispiel: Berechnung des Kontingenzkoeffizienten für folgende Daten für Haarfarbe und Augenfarbe

Haare\Augen	Blau	Braun
Hell	20	30
Dunkel	25	25

1) Ermittlung der Randhäufigkeiten:

Haare\Augen	Blau	Braun	Summe
Hell	20	30	50
Dunkel	25	25	50
Summe	45	55	100

Nun wird die Hilfsgröße χ^2 berechnet.

$$\chi^2 = \frac{\left(20 - \frac{45 * 50}{100}\right)^2}{\frac{45 * 50}{100}} + \cdots + \frac{\left(25 - \frac{55 * 50}{100}\right)^2}{\frac{55 * 50}{100}} = 1{,}01$$

Der Kontingenzkoeffizient nimmt also den Wert

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}} = \sqrt{\frac{1{,}01}{100 + 1{,}01}} = 0{,}1$$

an.

Der Kontingenzkoeffizient nimmt Werte zwischen 0 und $\sqrt{\frac{C^* - 1}{C^*}}$ an. C^*ist das Minimum aus Spaltenzahl und Zeilenzahl.

Um eine Maßzahl zu bekommen, die Werte zwischen 0 und 1 annimmt, kann auch der **korrigierte Kontingenzkoeffizient** berechnet werden:

$$C_{korr} = C\sqrt{\frac{C^*}{C^* - 1}}$$

Aufgaben zu 7.0

Aufgabe 7.1

Berechne der Pearsonschen Korrelationskoeffizienten für folgende Daten und gib an, was für ein Zusammenhang besteht (positiv, negativ, keiner):

Firma	1	2	3	4	5	6
Anzahl Mitarbeiter (X)	102	140	54	390	82	1000
Umsatz (Y)	200	250	180	320	140	510

Aufgabe 7.2

Gegeben ist folgende Häufigkeitstabelle:

	X1	X2	X3
Y1	1	5	4
Y2	8	3	5

Bestimme die relative Häufigkeiten von:

a) $f(Y1|X2)$

b) $f(X3|Y2)$

c) $f(X3)$

Aufgabe 7.3

Bei 2 metrisch messbaren Merkmalen wurde ein Korrelationskoeffizient von $r = 0{,}9$ gemessen. Was sind die richtigen Aussagen?

a) Der Zusammenhang zwischen den beiden Merkmalen ist wegen $r \neq 1$ nicht vorhanden.

b) Die beiden Merkmale sind linear voneinander abhängig.

c) Die beiden Merkmale sind proportional zueinander.

d) Die beiden Merkmale streuen eng um eine Gerade.

e) r gibt die Steigung dieser Geraden an.

Aufgabe 7.4

Es liegt folgende Häufigkeitsverteilung vor:

Y\X	1	2	3	4
1	5	3	7	9
2	2	4	2	8
3	3	6	3	6
4	9	6	8	6

a) Bestimme $f(x = (2 \text{ oder } 3)|y = 3)$

b) Bestimme $f(x = 2|y = 4)$

Aufgabe 7.5

Berechne die Kovarianz zu folgenden Daten:

Y\X	1	2	3
2	2	4	1
4	5	7	2
6	4	8	1

Aufgabe 7.6

Es wurden 100 Menschen nach Geschlecht und Haarfarbe befragt.

Berechne den Kontingenzkoeffizienten für folgende Datentabelle:

Geschlecht\Haar	Hell	Dunkel	Summe
Männlich	10	40	50
Weiblich	20	30	50
Summe	30	70	100

Aufgabe 7.7

Über die Häufigkeitsverteilung zweier Merkmale liegen die folgenden Daten vor:

$Y\backslash X$	$x = 1$	$x = 2$	Summe
$y = 1$	4		20
$y = 2$			
Summe			

$$f(y = 1|x = 1) = 0{,}4$$

Es wurden insgesamt 100 Umfragen durchgeführt.

Aufgabe 7.8

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Der Spearmannsche Rangkorrelationskoeffizient hat bei Merkmalen einer Kardinalskala geringere Aussagekraft als der Pearsonsche Korrelationskoeffizient.

b) Bei einem Pearsonschen Korrelationskoeffizienten von 1 ist der lineare Zusammenhang maximal, bei -1 minimal.

c) Der Kontingenzkoeffizient eignet sich für die Messung des Zusammenhangs zwischen einem nominalen und einem quantitativen Merkmal.

d) Sind zwei metrische Merkmale unabhängig, so ist der Pearsonsche Korrelationskoeffizient 0.

e) Ist der Pearsonsche Korrelationskoeffizient zweier metrisch messbarer Merkmale 0, so sind die Merkmale unabhängig.

Aufgabe 7.9

Gib an welcher Koeffizient bei den folgenden Merkmalen genutzt werden sollte.

Spearmansche Rangkorrelationskoeffizient: S

Pearsonsche Korrelationskoeffizient: P

Kontingenzkoeffizient: K

a) Staatsangehörigkeit und Körpergröße

b) Abschlussnote und Jahreseinkommen

c) Haarfarbe und Kopfumfang

d) Notenschnitt an der Uni und Kinderzahl

Aufgabe 7.10

Schätze y_6 mit $x_6 = 12$ mittels der Regressionsfunktion $y = a + bx$ anhand der folgenden Daten:

i	1	2	3	4	5
x_i	3	5	7	2	9
y_i	6	9	13	4,3	17

Aufgabe 7.11

Welche Aussagen über die Regressionsgerade $y = ax + b$ sind richtig?

a) Ist b sehr groß, so besteht ein starker linearer Zusammenhang zwischen a und b.

b) Mit der Regressionsfunktion werden Schätzwerte für X ermittelt.

Lösungen zu 7.0

Lösung zu 7.1

Man berechnet die notwendigen Werte für die Formel $r = \frac{Cov(X,Y)}{\tilde{s}_x * \tilde{s}_y}$:

$$Cov(X,Y) = 39989$$

$$\tilde{s}_x = 334$$

$$\tilde{s}_y = 123$$

$$r = \frac{39989}{334 * 123} = 0{,}975$$

Der Zusammenhang ist stark positiv.

Lösung zu 7.2

Zur Lösung dieser Aufgabe benötigt man die Randhäufigkeiten:

	X1	X2	X3	Summe
Y1	1	5	4	10
Y2	8	3	5	16
Summe	9	8	9	26

a) Die bedingte Verteilung von X2 ist:

	X2
Y1	5
Y2	3
Summe	8

Daraus folgt

$f(Y1|X2) = \frac{5}{8}$.

b) $\frac{5}{16}$

c) Hier muss man die Randverteilung von X betrachten. Die Lösung ist: $\frac{9}{26}$.

Lösung zu 7.3

a) Falsch. Kein Zusammenhang für $r \approx 0$.

b) Richtig

c) Falsch. Der Korrelationskoeffizient misst den linearen Zusammenhang. Nicht die Proportionalität.

d) Richtig. Es existiert ein hoher linearer Zusammenhang.

e) Falsch. r misst nur, wie nah die Werte an einer Geraden liegen.

Lösung zu 7.4

Man benötigt wieder die Randverteilungen.

Y\X	1	2	3	4	Summe
1	5	3	7	9	24
2	2	4	2	8	16
3	3	6	3	6	18
4	9	6	8	6	29
Summe	19	19	20	29	87

a) $f(x = (2 \text{ oder } 3)|y = 3) = \frac{6+3}{18} = 0{,}5$

b) $f(x = 2|y = 4) = \frac{6}{29}$

Lösung zu 7.5

Die Kovarianz berechnet sich nach der Formel:

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r}(x_i - \bar{x}) * (y_k - \bar{y}) * h(x_j, y_k)$$

Für die Berechnung der Mittelwerte benötigt man die Randverteilungen:

Y\X	1	2	3	Summe
2	2	4	1	7
4	5	7	2	14
6	4	8	1	13
Summe	11	19	4	34

$$\bar{x} = \frac{11 * 1 + 19 * 2 + 4 * 3}{34} = 1{,}79$$

$$\bar{y} = 4{,}35$$

Damit ergibt sich eine Kovarianz von:

$$Cov(X,Y) = \big((1 - 1{,}79) * (2 - 4{,}35) * 2 \ + \cdots + (3 - 1{,}79) * (6 - 4{,}35) * 1\big)/34 = -0{,}45$$

Lösung zu 7.6

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r}\frac{\left(h(x_j, y_k) - \frac{h(x_j) * h(y_k)}{n}\right)^2}{\frac{h(x_j) * h(y_k)}{n}}$$

$$= \frac{\left(10 - \frac{30 * 50}{100}\right)^2}{\frac{30 * 50}{100}} + \cdots = 4{,}76$$

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}} = \sqrt{\frac{4{,}76}{100 + 4{,}76}} = 0{,}21$$

Lösung zu 7.7

Für $x = 2, y = 1$ kann man direkt $20 - 4 = 16$ ablesen.

Aus $f(y = 1|x = 1) = 0{,}4$ folgt, dass die Summe über $x = 1$ (also die Randverteilung zu $x = 1$) 10 beträgt. $h(x = 1, y = 2)$ ist also $10 - 4 = 6$. Die restlichen Werte erhälst du durch simple Addition und Subtraktion.

$Y \backslash X$	$x = 1$	$x = 2$	Summe
$y = 1$	4	16	20
$y = 2$	6	74	80
Summe	10	90	100

Lösung zu 7.8

a) Richtig.

b) Falsch. Bei -1 ist er negativ. Bei Null ist er minimal.

c) Richtig.

d) Richtig

e) Falsch. Es wird nur der lineare Zusammenhang gemessen. Es kann eine nichtlineare Abhängigkeit vorliegen, die vom Korrelationskoeffizienten nicht erfasst wird.

Lösung zu 7.9

Sind die zwei Merkmale verschieden skaliert, so nutze immer den Koeffizienten für die Skala mit dem geringeren Informationsgehalt.

a) nominal/metrisch, also K

b) ordinal/metrisch, also S

c) nominal/metrisch, also K

d) ordinal/ordinal, also S

Lösung zu 7.10

Man benötigt zur Schätzung der Koeffizienten folgende Formeln:

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

Die einzelnen Werte sind:

$$\bar{x} = 5{,}2$$

$$\bar{y} = 9{,}86$$

$$\sum x_i^2 = 168$$

$$\sum x_i y_i = 315{,}6$$

Für b ergibt sich dann:

$$b = \frac{315{,}6 - 5 * 5{,}2 * 9{,}86}{168 - 5 * 27{,}04} = 1{,}8$$

$$a = 9{,}86 - 1{,}8 * 5{,}2 = 0{,}5$$

Für y_6 ergibt sich:

$$0{,}5 + 1{,}8 * 12 = 22{,}1$$

Lösung zu 7.11

a) Falsch. b gibt die Lage der Gerade an und sagt nichts über die Stärke des linearen Zusammenhangs aus.

b) Falsch. X ist unabhängige Variable. Y wird geschätzt

8.0 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Definition der Wahrscheinlichkeit nach Laplace:

Sind alle möglichen Ereignisse gleichwahrscheinlich, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses A der Quotient aus der „Anzahl aller für A günstigen Fälle“ und der „Anzahl aller möglichen Fälle“.

Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit mit einem Würfel eine 1 oder 2 zu würfeln (Ereignis A) ist: $2/6$. (Es gibt 2 für das Ereignis A positive Fälle und 6 insgesamt mögliche Fälle).

8.1 Statistische Definition der Wahrscheinlichkeit

In Anlehnung an die Definition von Laplace ist die statistische Wahrscheinlichkeit die relative Häufigkeit des Ereignisses A, die sich nach einer unendlich hohen Anzahl von Durchführungen des Zufallsexperimentes ergibt.

Man schreibt:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} f_n(A)$$

Wobei $f_n(A)$ die relative Häufigkeit des Ereignissen A angibt.

Einfacher gesagt: Der Statistiker wiederholt das Zufallsexperiment einfach sehr, sehr oft und errechnet dann die Wahrscheinlichkeit aus der Stichprobe.

Mit diesem Verfahren hängt das **Gesetz der großen Zahlen** zusammen. Danach strebt die relative Häufigkeit eines Ereignisses A mit zunehmendem Stichprobenumfang gegen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A.

Es ist selbstverständlich, dass die relative Häufigkeit eines Ereignisses für kleine Stichproben sehr weit von ihrer tatsächlichen Wahrscheinlichkeit abweichen kann. Einen ausreichend großen Stichprobenumfang zu wählen, um einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit zu bekommen, ist ebenfalls ein Gebiet der Statistik.

8.2 Grundregeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Notation zur Wahrscheinlichkeitsrechnung:

- Die Schnittmenge zweier Ereignisse:

$$A \cap B$$

Beispiel: Beim Roulette das Ereignis: „Rot und gerade“

- Die Vereinigung von Ereignissen:

$$A \cup B$$

Beispiel: Beim Roulette das Ereignis: „Rot oder gerade“

- Das komplementäre Ereignis:

$$\bar{A}$$

Die beiden Ereignisse *A* und $\overline{A}$ schließen einander aus.

Beispiel: Beim Roulette sind die Ereignisse: „3“ und „alle Zahlen außer 3“ komplementäre Ereignisse.

- Zwei sich gegenseitig ausschließende Ereignisse:

$$A \cap B = \emptyset$$

Beispiel: Beim Roulette das Ereignis: „0 und rot“

Additionsgesetz für sich gegenseitig ausschließende Ereignisse

Achtung: Bei der Summe von zwei Ereignissen, geht es nicht darum, dass beide Ereignisse eintreffen, sondern eines von beiden.

Bei der Addition von zwei sich ausschließenden Ereignissen addiert man einfach deren Wahrscheinlichkeiten.

Mathematisch schreibt man:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), für\ A \cap B = \emptyset$$

Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit beim Roulette eine 3 zu bekommen plus die Wahrscheinlichkeit eine 5 zu bekommen, ist natürlich „die Wahrscheinlichkeit eine 3 oder eine 5 zu bekommen".

Achte bei Aufgaben hierzu immer darauf, dass sich die Ereignisse auch wirklich ausschließen.

Additionsgesetz für zwei sich überschneidende Ereignisse

Überschneiden sich 2 Ereignisse, so würde bei einer reinen Addition die Schnittmenge doppelt berechnet werden. Sie muss also nach Addition wieder subtrahiert werden.

Mathematisch schreibt man:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Beispiel: Beim Roulette: Addition der Ereignisse: „Kleiner als 6" und „Gerade Zahlen unter 10". Würde man die beiden Wahrscheinlichkeiten einfach addieren, ergäbe sich:

$$P(0,1,2,3,4,5) + P(0,2,4,6,8) = P(0,0,1,2,2,3,4,4,5,6,8)$$

Die 0, die 2 und die 4 sind die Schnittmenge und wären doppelt enthalten. Daher müssen sie wieder subtrahiert werden. Das richtige Ergebnis ist also:

$$P(0,1,2,3,4,5) + P(0,2,4,6,8) - P(0,2,4) = P(0,1,2,3,4,5,6,8)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bei der bedingten Wahrscheinlichkeit wird sowohl die „Anzahl der für das Ereignis A positiven Fälle" als auch die „Anzahl aller möglichen Fälle", also der Nenner des Quotienten, für die Wahrscheinlichkeit eingeschränkt.

Mathematisch schreibt man

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Und liest es „Wahrscheinlichkeit von A gegeben B".

Beispiel: Ein Mann hat zwei Kinder. Mindestens eines davon ist ein Junge. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass das zweite Kind auch ein Junge ist?

Die Information, dass eines der Kinder ein Junge ist, ist eine Bedingung und verringert die Zahl aller möglichen Fälle von 4, nämlich

Erstes Kind	**Zweites Kind**
Junge	Junge
Junge	Mädchen
Mädchen	Mädchen
Mädchen	Junge

auf 3, nämlich

Erstes Kind	**Zweites Kind**
Junge	Junge
Junge	Mädchen
Mädchen	Junge

Ein anderes **Beispiel** wäre:

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Roulette eine 4 fällt, unter der Bedingung, dass auf jeden Fall eine gerade Zahl kommt?

Wie du siehst, wird durch die Bedingung die Zahl der möglichen Fälle verringert. Natürlich wird dadurch meistens auch die Zahl der für das Ereignis A positiven Fälle, also der Zähler des Quotienten für die Wahrscheinlichkeit, verringert.

Beispiel:

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Roulette eine Zahl unter 4 fällt, gegeben, dass eine gerade Zahl fällt? Jetzt ändert sich nicht nur der Nenner auf „alle geraden Zahlen des Roulette“ sondern auch der Zähler auf „alle geraden Zahlen unter 4“.

Unabhängige Ereignisse

Hat die Bedingung keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit, gilt also

$$P(A) = P(A|B),$$

so nennt man die beiden Ereignisse „stochastisch unabhängig“.

Beispiel:

Die Ereignisse:

A: Auf einem 20-seitigen Würfel fällt eine gerade Zahl

B: Auf einem 20-seitigen Würfel fällt eine Zahl die kleiner ist als 11

sind unabhängige Ereignisse. Es gilt:

$$P(A) = \frac{10}{20} = 0{,}5$$

und

$$P(A|B) = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

Zum weiteren Verständnis:

Wir betrachten hier 2 Mengen: Die Menge B und die zu *B* komplementäre Menge $\bar{B}$. Durch die Bedingung für *B* fällt $\bar{B}$ weg. Die beiden Ereignisse *A* und *B* sind nun voneinander unabhängig, wenn die Wahrscheinlichkeit von A in der Menge B genauso groß ist, wie in der Menge $\bar{B}$.

Mathematisch schreibt man:

$$P(A|B) = P(A|\bar{B})$$

Beispiel:

Die zwei Ereignisse

A: Fernstudent trinkt regelmäßig Alkohol

B: Student ist weiblich

Sollte die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis *A* in der Menge der für das Ereignis *B* positiven Fälle genauso groß sein, wie in der Menge der für das Ereignis $\bar{B}$ positiven Fälle, so sind die beiden Ereignisse stochastisch unabhängig. In anderen Worten: Ist die Wahrscheinlichkeit für regelmäßigen Alkoholkonsum bei männlichen Fernstudenten genauso groß, wie bei weiblichen, so sind A und B stochastisch unabhängig.

Multiplikationssätze

Werden zwei Zufallsexperimente hintereinander ausgeführt und beide sollen eintreffen, so müssen ihre Wahrscheinlichkeiten multipliziert werden. Sind die beiden Ereignisse voneinander stochastisch abhängig, so muss die Wahrscheinlichkeit des ersten Ereignisses mit der „Wahrscheinlichkeit des zweiten Ereignisses gegeben das erste Ereignis“ multipliziert werden.

Mathematisch schreibt man:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B|A)$$

Beispiel: An der Fernuni wird zunächst die Mathe Klausur geschrieben und danach die Statistik Klausur. Die zwei Ereignisse

A: Bestehen der Mathe Klausur

B: Bestehen der Statistik Klausur

haben jeweils die Wahrscheinlichkeiten 0,5 und 0,6 und sind voneinander abhängig, insofern, dass jeder Student, der die Mathe Klausur besteht zu 90% auch die Statistikklausur besteht. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Student nun beide Klausuren besteht ist:

$$0{,}5 * 0{,}9 = 0{,}45$$

Es gibt hier eine deutliche Verbindung zur bedingten Wahrscheinlichkeit. Durch das Ereignis A wird die Zahl aller möglichen Fälle und die Zahl der „für das Ereignis B positiven Fälle“ verringert.

Sollten die Ereignisse **A und B unabhängig** sein, so gilt

$$P(B) = P(B|A)$$

und der Multiplikationsatz ändert sich zu

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

Tipp: Du kannst die Multiplikationsregel auch an Stelle der Additionsregel nutzen.

Das versteht man am besten anhand eines **Beispiels:**

Angenommen, es fahren 2 Busse von Berlin nach Hamburg. Beide kommen jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 in Hamburg an. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer von beiden („oder" Verknüpfung) in Hamburg ankommt, wenn beide voneinander unabhängig verunglücken. Nach der Additionsregel ist dies:

Ereignis A: Der erste Bus kommt an.

Ereignis B: Der zweite Bus kommt an.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0{,}9 + 0{,}9 - (0{,}9 * 0{,}9) = 0{,}99$$

Alternative über die Multiplikationsregel:

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer der beiden Busse ankommt kann auch ermittelt werden, indem man die Wahrscheinlichkeit, dass keiner ankommt berechnet. Für alle anderen Fälle kommt mindestens einer an. Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Bus ankommt, ist also 1- „die Wahrscheinlichkeit, dass kein Bus ankommt".

$$P(A \cup B) = 1 - \big(1 - P(A)\big) * \big(1 - P(B)\big)$$

$$= 1 - (0{,}1 * 0{,}1) = 0{,}99$$

Ich persönlich finde die Alternative über die Multiplikationsregel anschaulicher. Welche Methode du nutzt, ist dir überlassen. Wichtig ist aber in jedem Fall, dass du immer weißt was du rechnest, und nicht blind in Formeln einsetzt.

8.3 Zusammengesetzte Aufgaben

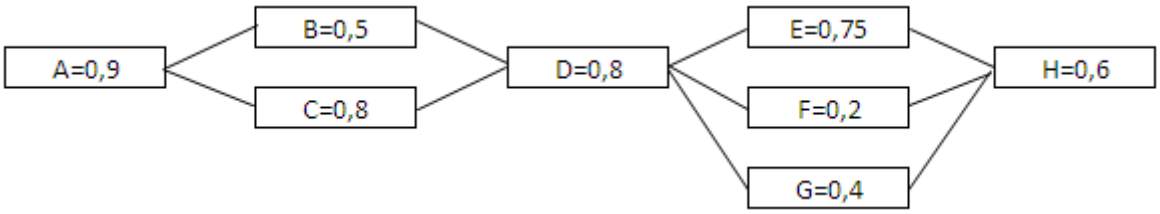
In diesem Kapitel werden die Rechenregeln miteinander kombiniert. In der Vielzahl dieser Aufgabentypen werden die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse unabhängig voneinander sein. Die Ereignisse werden durch „und“ (Multiplikationsregel) oder „oder“(Additionsregel) miteinander verknüpft.

Beispiel für zusammengesetzte Aufgaben:

Aufgaben zu diesem Thema lassen sich nach folgendem Modell strukturieren:

Mehrere Ereignisse werden durch „und“ Verknüpfungen miteinander verknüpft. Jedes dieser Ereignisse kann mehrere Ereignisse enthalten, die durch „oder“ Verknüpfungen verknüpft sind. Dies lässt sich am besten graphisch an folgendem **Beispiel** veranschaulichen:

Zu welcher Wahrscheinlichkeit treten A und (B oder C) und D und (E oder F oder G) und H ein?



Lösung: Berechne zunächst die Wahrscheinlichkeiten der „oder“ Verknüpfungen durch die Additionsregel oder die Alternative über die Multiplikationsregel:

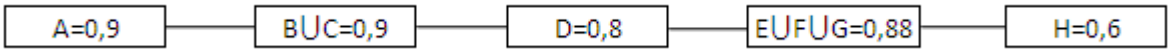
„B oder C“:

$$P(B \cup C) = 1 - (0{,}5 * 0{,}2) = 0{,}9$$

„E oder F oder G“:

$$P(E \cup F \cup G) = 1 - (0{,}25 * 0{,}8 * 0{,}6) = 0{,}88$$

Und nutze dann die Multiplikationsregel um die Wahrscheinlichkeit der neuen Ereigniskette zu lösen:



$$P(A \cap (B \cup C) \cap D \cap (E \cup F \cup G) \cap H) = 0{,}9 * 0{,}9 * 0{,}8 * 0{,}88 * 0{,}6 = 0{,}34$$

Aufgaben zu 8.0

Aufgabe 8.1

Gegeben sind 3 Ereignisse A,B,C, die sich nicht gegenseitig ausschließen müssen und es sei $A \cup B \cup C = \Omega$(Das bedeutet, dass A,B,C den gesamten Ereignisraum ausfüllen). Erfüllen die folgenden Funktionen P die Kolmogoroffschen Axiome nicht? (In Klausuren könntest du diese Fragestellung finden. Du musst nun testen ob es bei den angegebenen Wahrscheinlichkeiten zu Widersprüchen kommt (Beispiel: A ist 0,5, B ist 0,4 und die Schnittmenge aus beiden ist größer als 0,4)

a) $P(A \cup B) = 0{,}25$; $P(B) = 0{,}25$

b) $P(A) = 0{,}3$; $P(B) = 0{,}4$; $P(C) = 0{,}35$

c) $P(A) = 0{,}3$; $P(B) = 0{,}4$; $P(C) = 0{,}25$

d) $P(A) = 0{,}2$; $P(B) = 0{,}3$ $P(AUB) = 0{,}25$

Aufgabe 8.2

Du würfelst dreimal hintereinander mit einem 6-seitigen Würfel. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine 6 fällt?

Aufgabe 8.3

Ein Produkt durchläuft bei der Fertigung 4 Fertigungsstufen. In jeder Stufe besteht die Möglichkeit, dass ein Produktionsfehler unterläuft.

Stufe	Wkt. Für Fehler
1	5%
2	2%
3	8%
4	10%

Zusätzlich wird nach jeder Stufe das Produkt auf Fehler untersucht. Ein Fehler wird zu 80% gefunden und kann dann zu 50% repariert werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Endprodukt fehlerfrei?

Lösungen zu 8.0

Lösung zu 8.1

Versuche dir die Wahrscheinlichkeiten immer als Flächen vorzustellen. Bilde dann die Schnittmengen und Vereinigungen und prüfe auf Stimmigkeit.

a) Axiome erfüllt.

b) Axiome erfüllt.

c) Axiome nicht erfüllt, da $P(A) + P(B) + P(C) < 1$.

d) Axiome nicht erfüllt, da die Schnittmenge größer ist als die kleinste der beiden Wahrscheinlichkeiten.

Lösung zu 8.2

Die Wahrscheinlichkeit keine 6 zu würfeln entspricht der Wahrscheinlichkeit 3 mal hintereinander eine 1,2,3,4 oder 5 zu würfeln und damit:

$$\frac{5}{6} * \frac{5}{6} * \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$

Lösung zu 8.3

Man berechnet zunächst die Wahrscheinlichkeit jeder Stufe, dass das Produkt die Stufe mit einem Fehler verläßt:

Stufe 1: Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler geschieht und nicht gefunden wird: $5\% * 20\%$

Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler geschieht, gefunden wird und nicht repariert werden kann: $5\% * 80\% * 50\%$.

Zusammen ergibt sich: $1\% + 2\% = 3\%$

Stufe 2: $2\% * 20\% + 2\% * 80\% * 50\% = 1{,}2\%$

Stufe 3: $8\% * 20\% + 8\% * 80\% * 50\% = 4{,}8\%$

Stufe 4:$10\% * 20\% + 10\% * 80\% * 50\% = 6\%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Produkt keinen Fehler hat ist nun:

$(1 - 3\%) * (1 - 1{,}2\%) * (1 - 4{,}8\%) * (1 - 6\%) = 85{,}76\%$

9.0 Zufallsvariablen

Wie der Name schon sagt, sind Zufallsvariablen Variablen, die zufällig bestimmte Werte annehmen.

So ist zum Beispiel das Ergebnis eines Würfelwurfs eine Zufallsvariable, die zufällig ganze Werte zwischen 1 und 6 annimmt.

Zufallsvariablen können **diskret** oder **stetig** sein.

- Diskrete Zufallsvariablen können nur bestimmte, also abzählbar viele Werte annehmen (**Beispiel:** Würfelwurf).

- Stetige Zufallsvariablen können innerhalb eines bestimmten Intervalls jeden Wert der reellen Zahlen annehmen (**Beispiel:** Körpergröße).

9.1 Wahrscheinlichkeitsverteilung und Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion

Eine **Wahrscheinlichkeitsverteilung** gibt zu jeder möglichen Ausprägung der Zufallsvariable die Wahrscheinlichkeit an.

- Bei diskreten Zufallsvariablen wird zu jeder Ausprägung die Wahrscheinlichkeit angegeben. „Die Wahrscheinlichkeit für eine 1 bei einem Würfelwurf ist 1/6“.

- Bei stetigen Zufallsvariablen wird zu gewissen Ausprägungsintervallen die Wahrscheinlichkeit angegeben. **Beispiel:** “Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Mensch zwischen 180 und 185 cm groß ist, beträgt 20%“.

Wahrscheinlichkeitsfunktion

In einigen Fällen kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung durch eine Funktion beschrieben werden.

Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit, daß beim Roulette eine gewisse Zahl kommt ist

$$f_X(x) = \frac{1}{37}$$

Dichtefunktion

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion ist ein Hilfsmittel zur Beschreibung einer stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung. Die Integration der Wahrscheinlichkeitsdichte über ein Intervall ergibt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Zufallsvariable mit dieser Dichte einen Wert in diesem Intervall annimmt.

9.2 Verteilungsfunktion

Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable stellt die Summenhäufigkeiten der Zufallsvariable dar. Mathematisch schreibt man:

$$F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} f_X(x_i) = P(X \leq x)$$

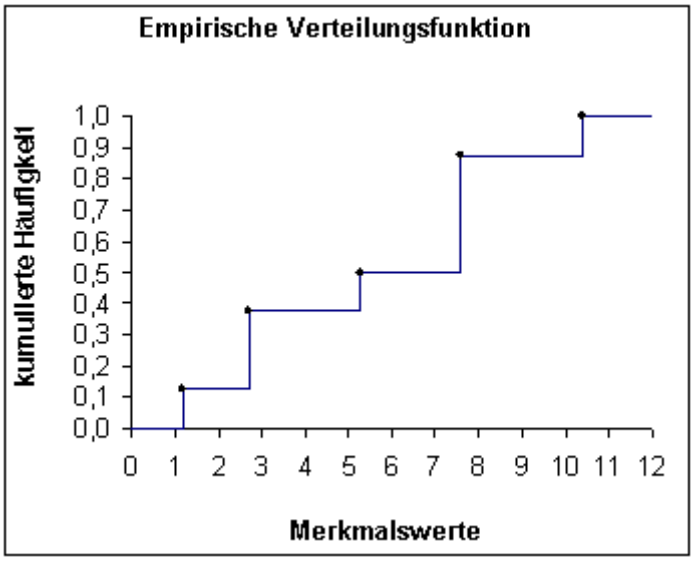
Anschaulich gesprochen: Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable einen Wert kleiner oder gleich x annimmt.

Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Würfelwurf 3 oder kleiner ergibt ist gleich dem Wert der Verteilungsfunktion an der Stelle $x = 3$.

$$F_X(3) = P(X \leq 3) = f_X(1) + f_X(2) + f_X(3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Merke: Die Verteilungsfunktion ist die Stammfunktion der Wahrscheinlichkeitsfunktion!

Grafik Verteilungsfunktion



Die Verteilungsfunktion hat folgende Eigenschaften:

- Da Wahrscheinlichkeiten nicht negativ sein können, ist die Verteilungsfunktion monoton steigend und der minimale Wert ist 0.

- Da die maximale Wahrscheinlichkeit 1 ist, ist das Maximum der Verteilungsfunktion 1.

- Verteilungsfunktionen sind rechtsseitig stetig. An den Stellen, die eigentlich unstetig sind - den Sprungstellen - nimmt die Verteilungsfunktion den Wert des Punktes an. **Achtung:** Die Verteilungsfunktion ist **nur** rechtsseitig stetig. Definiert man sie als $P(X < x)$, so ist sie linksseitig stetig.

9.3 Der Erwartungswert einer Zufallsvariable

Der Erwartungswert einer Zufallsvariable ist der Durchschnittswert, der nach Wahrscheinlichkeiten gewichteten Ausprägungen der Zufallsvariable.

Mathematisch schreibt man für eine diskrete Zufallsvariable:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i * f_X(x_i)$$

Für eine stetige Zufallsvariable ist der entsprechende Ausdruck:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x * f_X(x)dx$$

Das Symbol für den Erwartungswert ist μ.

Beispiel:

Der Erwartungswert eines Würfelwurfes ist:

$$E(X) = 1 * \frac{1}{6} + 2 * \frac{1}{6} + 3 * \frac{1}{6} + 4 * \frac{1}{6} + 5 * \frac{1}{6} + 6 * \frac{1}{6} = 3{,}5$$

9.4 Standardabweichung und Varianz einer Zufallsvariable

Die Varianz einer Zufallsvariable ist die Summe der nach ihren Wahrscheinlichkeiten gewichteten quadrierten Abweichungen der Ausprägungen von ihrem Mittelwert. Um den Satz auch zu verstehen, hier eine anschaulichere Beschreibung:

Zunächst berechnet man zu jeder Merkmalsausprägung die Differenz zum Mittelwert. Diese Differenz wird quadriert und mit ihrer Wahrscheinlichkeit multipliziert. Die Summe dieser Werte ergibt die Varianz. Je stärker also die Ausprägungen von ihrem Mittelwert abweichen, desto größer ist die Varianz.

Mathematisch schreibt man:

$$Var(X) = \sum_{i} \big(x_i - E(X)\big)^2 * f_X\,(x_i)$$

Bei einer stetigen Zufallsvariable entsprechend:

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 * f_X(x)dx$$

Beispiel:

Die Varianz eines Würfelwurfes ergibt sich nach:

$$Var(X) = (1-3{,}5)^2 * \frac{1}{6} + (2-3{,}5)^2 * \frac{1}{6} + (3-3{,}5)^2 * \frac{1}{6} + (4-3{,}5)^2 * \frac{1}{6} + (5-3{,}5)^2 * \frac{1}{6} + (6-3{,}5)^2 * \frac{1}{6} = 2{,}916$$

Die **Standardabweichung** ist die Wurzel aus der Varianz:

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

9.5 Die Ungleichung von Tschebyscheff (nicht mehr klausurrelevant)

Die Ungleichung von Tschebyscheff findet in folgender Aufgabenstellung Anwendung:

Zu ermitteln ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable einen Wert in einem Intervall annimmt, der symmetrisch um den Mittelwert liegt. Dieses Intervall kann durch ein Vielfaches der Standardabweichung beschrieben werden. Mathematisch schreibt man:

$$P(\mu - c\sigma \leq X \leq \mu + c\sigma)$$

Diese Frage kann nur beantwortet werden, wenn man die Verteilung der Zufallsvariable genau kennt. Ist diese unbekannt, so kann sie mit Hilfe von Tschebyscheffs Ungleichung geschätzt werden. Für beliebiges c und eine beliebige Verteilung der Zufallsvariablen gilt demnach:

$$P(\mu - c\sigma \leq X \leq \mu + c\sigma) \geq 1 - \frac{1}{c^2}$$

Dies ist nur eine Schätzung!

Beispiel:

Gegeben ist die Zufallsvariable X mit Mittelwert von 5 und einer Standardabweichung von 0,5. Die Art der Verteilung ist unbekannt. Es soll geschätzt werden mit welcher Wahrscheinlichkeit X in das Intervall 4 bis 6 fällt.

Zur Beantwortung muss zunächst der Wert für c in Tschebyscheffs Ungleichung ermittelt werden:

$$P(\mu - c\sigma \leq X \leq \mu + c\sigma) \geq 1 - \frac{1}{c^2}$$

$$\mu - c\sigma = 4$$

Es folgt:

$$c = 2$$

$$P(4 \leq X \leq 6) \geq 0{,}75$$

9.6 Funktionen von Zufallsvariablen

Es gibt auch Funktionen von Zufallsvariablen. In diesem Fall gelten die Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz unverändert.

Beispiel:

Du würfelst mit einem Würfel und ich bezahle dir das zweifache Würfelergebnis in Euro aus. Bestimme die Funktion und die dazugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung sowie die Parameter μ_Y und σ_Y.

Lösung:

Der Würfelwurf hat folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

X_i	1	2	3	4	5	6
$P(X_i)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Dazu ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y folgendermaßen:

Y_i	2	4	6	8	10	12
$P(Y_i)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Daraus ergeben sich nach den bekannten Rechenregeln die Parameter μ_Y und σ_Y:

$$\mu_Y = 7$$

$$\sigma_Y = 3{,}42$$

Die Parameter μ_Y und σ_Y lassen sich auch direkt ermitteln. Dabei unterscheidet man zwischen:

1) einer **linearen Transformation:** $Y = aX + b$ also Y in Abhängigkeit nur einer Zufallsvariablen,

2) einer **linearen Funktion:** $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots a_nX_n + b$ also Y in Abhängigkeit mehrerer Zufallsvariablen.

- Direkte Berechnung des Erwartungswertes einer linearen Transformation:

$$E(Y) = E(aX + b) = a * E(X) + b$$

- Direkte Berechnung der Varianz einer linearen Transformation:

$$Var(Y) = a^2 Var(X)$$

- Direkte Berechnung des Erwartungswertes einer linearen Funktion:

$E(Y) = a_1E(X_1) + a_2E(X_2) + \cdots + a_nE(X_n)$+b

- Direkte Berechnung der Varianz einer linearen Funktion:

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i)$$

9.7 Standardisierung von Zufallsvariablen

Eine standardisierte Zufallsvariable hat einen Erwartungswert von 0 und eine Standardabweichung von 1.

Um einer beliebig verteilten Zufallsvariable eine standardisierte zu machen, muss man den Mittelwert von ihr abziehen und das Ergebnis durch die Standardabweichung teilen.

Mathematisch schreibt man:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Eine standardisierte Zufallsvariable wird meistens mit Z bezeichnet.

Beispiel:

Eine Zufallsvariable hat den Mittelwert 3 und eine Standardabweichung von 2,5. Die standardisierte Zufallsvariable ist dann:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 3}{2{,}5}$$

9.8 Mehrdimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Die gemeinsame Verteilung zweier Merkmale lässt sich am besten anhand eines Beispiels verdeutlichen:

Wurf mit zwei Würfeln W1 und W2 unter Berücksichtigung der Reihenfolge. Die Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Ergebnissen lassen sich in folgender Tabelle darstellen:

W1/W2	1	2	3	4	5	6	Summe
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
Summe	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

Die Summen am rechten und am unteren Rand sind die Randverteilungen, oder auch marginalen Verteilungen. Sie geben die Wahrscheinlichkeit der einen Merkmalsausprägung unter nicht-Beachtung des anderen Merkmals an.

Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Würfel eine 1 zeigt, ohne Berücksichtigung des Würfelergebnisses des zweiten Würfels, ist *1/6.*

Bedingte Wahrscheinlichkeit:

Die Bedingte Wahrscheinlichkeit lässt sich ermitteln, indem die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Feldes durch den entsprechenden Wert der Randverteilung geteilt wird.

Sucht man zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit, dass beim zweiten Würfel eine 1 kommt, unter der Bedingung, dass der erste Wurf eine 3 zeigt, so verringert man die Menge aller möglichen Fälle auf die Zeile $W1 = 3$. Die Wahrscheinlichkeit, dass der zweite Würfel eine 1 ergibt, ist nun das Verhältnis der Wahrscheinlichkeit von $W2 = 1$ zu der Summe aller möglichen Ausprägungen von W2 (Die Randverteilung von $W1 = 3$).

Da die Würfelergebnisse zweier Würfel gleichverteilt und voneinander unabhängig sind, sind alle Wahrscheinlichkeiten 1/36 bzw. 1/6.

Wählt man zwei voneinander abhängige (Zur Abhängigkeit später mehr) und nicht gleichverteilte Zufallsvariablen, so wird der Zusammenhang etwas deutlicher:

Beispiel:

Die Noten Mathe(M) und Statistik(S) an der Fernuni Hagen:

M/S	1	2	3	4	5	6	Summe
1	0,03	0,03	0,01	0,01	0	0	0,08
2	0,01	0,03	0,01	0,02	0,03	0	0,1
3	0,01	0,03	0,15	0,1	0,01	0	0,3
4	0	0,02	0,1	0,08	0,05	0	0,25
5	0	0,01	0,13	0,07	0	0,01	0,22
6	0	0	0	0,02	0,01	0,02	0,05
Summe	0,05	0,12	0,4	0,3	0,1	0,03	1

Um das Verständnis der Tabelle zu prüfen, löse folgende **Aufgaben**:

1) Was ist die bedingte Wahrscheinlichkeit eine 3 in Statistik zu haben, wenn man nur die Studenten mit der Note 4 in Mathe betrachtet?

2) Was ist $P(M = 3|S = 4)$?

3) Welcher Anteil der Studenten, deren Mathenote 3 oder besser ist, haben eine 2 in Statistik?

Antworten:

1) $\frac{0,1}{0,25} = 40\%$

2) $\frac{0,1}{0,3} = 33,33\%$

3) $\frac{0,03+0,03+0,03}{0,08+0,1+0,3} = 18,75\%$

Parameter zweidimensionaler Verteilungen

In der Klausur kann auch nach dem Erwartungswert oder der Varianz der bedingten Wahrscheinlichkeit oder der Randverteilung gefragt werden. Zur Lösung musst du nur die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten berechnen und dann wie gewohnt die Parameter berechnen.

Hier noch ein **Beispiel:**

Sollst du etwa für das Mathe/Statistik-Beispiel den Erwartungswert und die Varianz der Statistiknoten aller Studenten mit einer 4 in Mathe berechnen, so bestimmst du zunächst die bedingten Wahrscheinlichkeiten:

M/S	1	2	3	4	5	6
4	0	0,02/0,25	0,1/0,25	0,08/0,25	0,05/0,25	0

Nun berechnest du Erwartungswert und Varianz, wie du es nach den Rechenregeln für eindimensional verteilte Zufallsvariablen kennst.

Sollst du Erwartungswert oder Varianz einer Randverteilung berechnen, so ist die Lösung noch einfacher: Die Wahrscheinlichkeiten musst du nur aus der entsprechenden Randverteilung ablesen und kannst die Parameter direkt berechnen.

Kovarianz zweidimensional verteilter Zufallsvariablen

Die Kovarianz hast du schon in Kapitel 7.5 kennengelernt, nur dass dort noch mit relativen Häufigkeiten, statt mit Wahrscheinlichkeiten gerechnet wurde. Die relative Häufigkeit ist ein Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit (siehe „Gesetz der großen Zahlen“).

$$Cov(X,Y) = \sum_{j=!}^{m} \sum_{k=1}^{r} (x_i - \bar{x}) * (y_k - \bar{y}) * f(x_j, y_k)$$

Rechenregeln für Kovarianzen:

$$Cov(X,X) = Var(X)$$

$$Cov(X,Y) = E(X*Y) - E(X)*E(Y)$$

$$Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$$

$$Cov(a_1X + b_1, a_2Y + b_2) = a_1a_2Cov(X,Y)$$

Stochastische (Un-)Abhängigkeit zweidimensionaler Verteilungen

Es gibt zwei verschiedene Möglichkeiten die Abhängigkeit zweier Merkmale zu testen:

- Berechnen der Kovarianz: Ist diese ungleich Null, so besteht eine Abhängigkeit.

- Test anhand der Verteilungstabelle: Sind die beiden Merkmale stochastisch unabhängig, so muss dass Produkt zweier Werte der Randverteilungen dem entsprechenden Wert in der Tabelle entsprechen. Mathematisch schreibt man:

Die Zufallsvariablen X und Y sind stochastisch unabhängig wenn gilt:

$$f_{XY}(x_i, y_i) = f_X(x_i) * f_Y(y_i)$$

Ansonsten sind sie stochastisch abhängig.

Beispiel: Teste die zweidimensionale Verteilung von Mathe und Statistiknoten auf stochastische Abhängigkeit, indem du das Produkt der Randverteilungen für „Mathenote $= 2$“ und „Statistiknote $= 3$" berechnest und mit dem Tabellenwert vergleichst.

M/S	1	2	3	4	5	6	Summe
1	0,03	0,03	0,01	0,01	0	0	0,08
2	0,01	0,03	0,01	0,02	0,03	0	0,1
3	0,01	0,03	0,15	0,1	0,01	0	0,3
4	0	0,02	0,1	0,08	0,05	0	0,25
5	0	0,01	0,13	0,07	0	0,01	0,22
6	0	0	0	0,02	0,01	0,02	0,05
Summe	0,05	0,12	0,4	0,3	0,1	0,03	1

Lösung: Die Randverteilungen an den Stellen „Mathenote $= 2$“ und „Statistiknote $= 3$“ betragen 0,1 und 0,4. Der entsprechende Wert in der Verteilungstabelle ist 0,01. Für stochastische Unabhängigkeit müsste gelten:

$$f_{XY}(x_i, y_i) = f_X(x_i) * f_Y(y_i)$$

Also:

$$0{,}01 \neq 0{,}1 * 0{,}4$$

Da dies ungültig ist, sind die beiden Merkmale stochastisch abhängig.

Aufgaben zu 9.0

Aufgabe 9.1

	$x = 1$	$x = 2$
$y = 2$	0,1	0,3
$y = 3$	0,2	0,2
$y = 4$	0,1	0,1

Berechne $E(Y), Var(X), Cov(X, Y)$

Aufgabe 9.2 (nicht mehr klausurrelevant)

Eine Zufallsvariable hat Erwartungswert 10 und Standardabweichung 2. Die genaue Verteilung ist nicht bekannt. Schätze mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyscheff mit welcher Wahrscheinlichkeit X mehr als 4 von seinem Mittelwert abweicht.

Aufgabe 9.3

Für die 2 unabhängigen Zufallsvariablen X und Y gilt:

$$E(X) = 1 \quad Var(X) = 2$$

$$E(Y) = 2 \quad Var(Y) = 3$$

Berechne Erwartungswerte und Varianzen der folgenden Zufallsvariablen:

a) A: $3 + 2X$

b) B: $2X + 3Y + 4$

Aufgabe 9.4

Gegeben seien 5 Zufallsvariablen X1 bis X5 mit Erwartungswert 1 und Varianz 2.

Berechne den Erwartungswert und die Varianz des arithmetischen Mittels der Zufallsvariablen.

Aufgabe 9.5

Die Zufallsvariable X hat den Erwartungswert 5 und die Standardabweichung 9. Die genaue Verteilung ist nicht bekannt.

Gib an in welchen, um den Mittelwert symmetrischen, Intervall X mit mindestens 90% fallen wird.

Aufgabe 9.6

Welche Aussagen über die Verteilungsfunktion F_X sind richtig?

a) Die Fläche unterhalb der Verteilungsfunktion ist immer gleich 1.

b) Die absolute Summenhäufigkeitsverteilung ist die Verteilungsfunktion.

c) Die Verteilungsfunktion ist links- und rechtsseitig stetig.

d) Der Maximalwert, den F_X annehmen kann ist 1.

e) Ist X eine stetige Zufallsvariable, dann ist F_X eine Treppenfunktion.

f) Jede Verteilungsfunktion ist monoton steigend

g) Jede Verteilungsfunktion ist streng monoton steigend.

Aufgabe 9.7

Welche Aussagen sind richtig?

a) Für eine stetige Zufallsvariable gilt: $P(X = a) = 0$ für alle a.

b) Die Dichtefunktion hat den Maximalwert 1.

c) Der Wert $f(x_0)$ einer Dichtefunktion einer Zufallsvariable gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit X den Wert x_0 annimmt.

d) Die Dichtefunktion kann als kummulierte Verteilungsfunktion aufgefasst werden.

Aufgabe 9.8

Gegeben sei folgende Dichtefunktion:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0{,}5 + ax & f\ddot{u}r\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Berechne a.

Aufgabe 9.9

Gegeben ist die Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3 \text{ für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \qquad\qquad sonst \end{cases}$$

Berechne F_X.

Aufgabe 9.10

Gegeben ist folgende Verteilungsfunktion:

$$F_X = \begin{cases} 0 \text{ für } x < 0 \\ 0{,}25x \text{ für } 0 \leq x \leq 4 \\ 1 \text{ für } x > 4 \end{cases}$$

Berechne:

a) $P(X = 1)$

b) $P(X \leq 3)$

c) $P(X \geq 2)$

Aufgabe 9.11

Gegeben sei folgende Verteilungsfunktion:

$$F_X = \begin{cases} 0 \text{ für } x < 0 \\ 0{,}2 \text{ für } 0 \leq x < 0{,}2 \\ 0{,}6 \text{ für } 0{,}2 \leq x < 0{,}5 \\ 1 \text{ für } 0{,}5 \leq x \end{cases}$$

Berechne

a) $P(x < 0{,}5)$

b) $P(x \leq 1)$

c) $P(0{,}2 \leq x < 0{,}5)$

Lösungen zu 9.0

Lösung zu 9.1

Hilfreich bei mehrdimensional verteilten Variablen ist immer die Randverteilung:

	$x = 1$	$x = 2$	Summe
$y = 2$	0,1	0,3	0,4
$y = 3$	0,2	0,2	0,4
$y = 4$	0,1	0,1	0,2
Summe	0,4	0,6	1

$$E(Y) = 0{,}4 * 2 + 0{,}4 * 3 + 0{,}2 * 4 = 2{,}8$$

Für die Varianz von X benötigt man zunächst den Erwartungswert von X:

$$E(X) = 1{,}6$$

Die Varianz berechnet sich nach:

$$Var(X) = \sum_i \left(x_i - E(X)\right)^2 * f_X\left(x_i\right)$$

$$Var(X) = (1 - 1{,}6)^2 * 0{,}4 + (2 - 1{,}6)^2 * 0{,}6 = 0{,}24$$

Die Kovarianz berechnet sich nach:

$$Cov(X, Y) = \sum_{j=!}^{m} \sum_{k=1}^{r} (x_i - \bar{x}) * (y_k - \bar{y}) * f(x_j, y_k)$$

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) = {} & (1 - 1{,}6) * (2 - 2{,}8) * 0{,}1 + (2 - 1{,}6) * (2 - 2{,}8) * 0{,}3 + (1 - 1{,}6) * (3 - 2{,}8) * 0{,}2 \\ & + (2 - 1{,}6) * (3 - 2{,}8) * 0{,}2 + (1 - 1{,}6) * (4 - 2{,}8) * 0{,}1 + (2 - 1{,}6) * (4 - 2{,}8) \\ & * 0{,}1 = -0{,}08 \end{aligned}$$

Lösung zu 9.2 (nicht mehr klausurrelevant)

Die Ungleichung von Tschebyscheff lautet:

$$P(\mu - c\sigma \leq X \leq \mu + c\sigma) \geq 1 - \frac{1}{c^2}$$

$\mu - c\sigma$ ist die Abweichung vom Mittelwert. Diese darf maximal 4 sein. Es gilt also:

$10 - c * 2 = 6$

Daraus folgt $c = 2$.

Für die Wahrscheinlichkeit, dass X **weniger** als 4 von seinem Mittelwert abweicht folgt dann

$$P(|X - \mu| \leq 4) \geq \frac{3}{4}$$

Dass X mehr als 4 von seinem Mittelwert abweicht, ist entsprechend

$$1 - \ P(|X - \mu| \leq 4) = \ P(|X - \mu| > 4) < \frac{1}{4}$$

Lösung zu 9.3

a) $E(A) = 3 + 2 * 1 = 5$

$Var(A) = 2^2 * 2 = 8$

b) $E(B) = 2 * 1 + 3 * 2 + 4 = 12$

$Var(B) = 2^2 * 2 + 3^2 * 3 = 35$

Diese Aufgaben kommen oft drann. Wichtig ist, dass du dir merkst:

$$VAR(aX) = a^2 VAR(X)$$

Und für **unabhängige** Zufallsvariablen X und Y gilt

$$VAR(X + Y) = VAR(X) + VAR(Y)$$

Lösung zu 9.4

$$E\left(\frac{1}{5}(X1 + X2 + X3 + X4 + X5)\right) = 1$$

$$Var\left(\frac{1}{5}(X1 + X2 + X3 + X4 + X5)\right) = \left(\frac{1}{5}\right)^2 * (X1 + X2 + X3 + X4 + X5) = \frac{2}{5}$$

Lösung zu 9.5 (nicht mehr klausurrelevant)

Nach Tschebyschef gilt:

$$P(\mu - c\sigma \leq X \leq \mu + c\sigma) \geq 1 - \frac{1}{c^2}$$

$P(\mu - c\sigma \leq X \leq \mu + c\sigma)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass X in das Intervall $\mu - c\sigma \leq X \leq \mu + c\sigma$ fallen wird. Diese Wahrscheinlichkeit soll 90% sein.

$$0{,}9 = 1 - \frac{1}{c^2}$$

Umgeformt nach c ergibt:

$$c = \sqrt{10}$$

Eingesetzt in die Tschebyscheff Ungleichung:

$$P\left(5 - 9 * \sqrt{10} \leq X \leq 5 + 9\sqrt{10}\right) \geq 0.9$$

Das Intervall ist -23,46 bis 33,46.

Lösung zu 9.6

a) Falsch, das gilt für die Dichtefunktion.

b) Falsch, es ist die relative Summenhäufigkeitsverteilung.

c) Falsch. Sie ist nur rechtsseitig stetig.

d) Richtig.

e) Falsch. Dies wäre für diskrete Zufallsvariablen der Fall.

f) Richtig.

g) Falsch. Die Verteilungsfunktion eines diskreten Merkmals ist nicht streng monoton steigend, sondern nur monoton steigend.

Lösung zu 9.7

a) Richtig. Bei stetigen Zufallsvariablen strebt die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Wert gegen 0.

b) Falsch. Das gilt für die Verteilungsfunktion.

c) Falsch. Wahrscheinlichkeiten werden in Flächen dargestellt. Der Wert $f(x)$ hat alleine keine vollständige Aussagekraft.

d) Falsch. Das ist der Fall für Verteilungsfunktionen.

Lösung zu 9.8

Bekannt ist, dass die Fläche unter der Dichtefunktion 1 ist. Es muss also gelten:

$$\int_0^1 0{,}5 + ax\, dx = 1$$

$$\left[0{,}5x + \frac{1}{2}ax^2\right]_0^1 = 1$$

Daraus folgt $a = 1$.

Lösung zu 9.9

$F_X$ist die Stammfunktion zu $f_X(x)$ und nimmt Werte zwischen 0 und 1 an.

$$F_X = \begin{cases} 0\ f\ddot{u}r\ x < 0 \\ x^4\ f\ddot{u}r\ 0 \le x \le 1 \\ 1\ f\ddot{u}r\ x > 1 \end{cases}$$

Lösung zu 9.10

a) $P(x = 1) = 0$ (stetige Zufallsvariable)

b) $P(x \le 3) = 0{,}75$

c) $P(x \ge 2) = 1 - P(X \le 2) = 0{,}5$

Lösung zu 9.11

a) $P(x \le 0{,}5) = 0{,}6$

b) $P(x \le 1) = 1$

c) $P(0{,}2 \le x < 0{,}5) = 0{,}6 - 0{,}2 = 0{,}4$

10.0 Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen

In diesem Kapitel werden die Gleichverteilung, die Binomialverteilung und die Normalverteilung besprochen.

Die Parameter Erwartungswert und Varianz jeder beliebigen Verteilung kannst du immer nach den bekannten Rechenregeln ermitteln. Für die jeweilige Verteilung kann man die Werte für den Erwartungswert und die Varianz aber auch in Abhängigkeit von n (für die diskrete Zufallsvariable) oder den Intervallgrenzen a und b (für stetige Zufallsvariable) ermitteln. N steht in diesem Falle für die Anzahl an möglichen Ausprägungen der diskreten Zufallsvariable.

10.1 Die Gleichverteilung

Die Gleichverteilung ist die einfachste von allen Verteilungen. Alle Merkmalsausprägungen besitzen die gleiche Wahrscheinlichkeit!

Merkmale der Gleichverteilung:

- Erwartungswert der diskreten Gleichverteilung:

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

Der Erwartungswert eines Würfelwurfs ist zum **Beispiel:** $\frac{6+1}{2} = 3{,}5$.

- Varianz der diskreten Gleichverteilung:

$$Var(X) = \frac{1}{12}(n^2 - 1)$$

- Dichtefunktion einer stetigen Gleichverteilung:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & f\ddot{u}r\ a \leq x \leq b \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Ist zum Beispiel eine Zufallsvariable über dem Intervall $a = 1$ und $b = 4$ gleichverteilt, so ist die Wahrscheinlichkeit über alle X in diesem Intervall gleich. Da die Summe der Wahrscheinlichkeiten 1 ergeben muss, beträgt die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{b-a}$ innerhalb dieses Intervalls und 0 außerhalb.

- Verteilungsfunktion einer stetigen Gleichverteilung:

Die Verteilungsfunktion ist die Stammfunktion der Dichtefunktion. Sie hat daher außerhalb des Intervalls zwischen a und b die Steigung Null und steigt zwischen a und b mit der Steigung $\frac{1}{b-a}$.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{für } a \leq x < b \\ 1 & \text{für } b \leq x \end{cases}$$

- Erwartungswert der stetigen Gleichverteilung:

$$E(X) = \frac{b+a}{2}$$

Da X über das Intervall a bis b gleichverteilt ist, liegt der Erwartungswert natürlich in der Mitte.

- Varianz der stetigen Gleichverteilung:

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

10.2 Die Binomialverteilung

Eine ebenfalls einfache Verteilung ist die sogenannte Binomialverteilung.

Betrachtet wird ein Zufallsexperiment, bei dem es nur 2 mögliche Ergebnisse, A und $\bar{A}$, gibt, die mit der Wahrscheinlichkeit p bzw. $1-p$ auftreten. Dieses Experiment wird nun x-mal hintereinander ausgeführt (ein sogenanntes Bernoulli-Experiment).

Die Binomialverteilung gibt nun bei n-maliger Wiederholung des Experimentes an, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Ereignis *A* **genau** x-mal eintritt.

Beispiel: Eine Münze wird 5 mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt genau 4 mal Kopf? Die Anzahl an „Köpfen“ ist hier binomialverteilt.

Da die Verteilung von der Wahrscheinlichkeit p und der Anzahl an Wiederholungen n abhängt schreibt man auch:

X ist binomialverteilt mit den Parametern n und p.

$$B(x|n,p)$$

Die Binomialverteilung hat folgende Merkmale:

- Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$B(x|n,p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

für $x = 1$ bis n.

- Verteilungsfunktion:

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

für $x = 1$ bis n. Das k gibt in diesem Fall die Anzahl an positiven Ereignissen an.

- Erwartungswert der Binomialverteilung:

$$E(X) = np$$

- Varianz der Binomialverteilung:

$$Var(X) = np(1-p)$$

Approximationsmöglichkeiten

Für $np(1-p) > 9$ ist eine binomialverteilte Zufallsvariable annähernd normalverteilt mit Erwartungswert np und Varianz $np(1-p)$.

10.3 Die Normalverteilung

Die Normalverteilung ist die wichtigste Verteilung - sowohl für die Klausur, als auch in der Praxis.

Ein bekanntes Bespiel für die Normalverteilung sind die Aktienmarktreturns.

Merkmale der Normalverteilung:

- Erwartungswert der Normalverteilung:

$$E(X) = \mu$$

- Varianz der Normalverteilung:

$$Var(X) = \sigma^2$$

Man schreibt auch für „Die Zufallsvariable X ist normalverteilt mit Mittelwert μ und Varianz σ^2“:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Eigenschaften der Normalverteilung:

- Die Normalverteilung ist symmetrisch.

- Mit steigender Varianz wird die Normalverteilung flacher und breiter. Mit steigendem Erwartungswert wird sie auf der X-Achse nach rechts verschoben.

- Eine Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Varianz 1 heißt **Standardnormalverteilung.** In diesem Zusammenhang kannst du das Kapitel 7.7 Standardisierung von Zufallsvariablen kurz wiederholen. Dort wird eine Zufallsvariable standardisiert indem man den Erwartungswert subtrahiert (auf der X-Achse zum Nullpunkt hin verschiebt) und das Ergebnis durch die Standardabweichung teilt (die Höhe und Breite an die Standardnormalverteilung mit Varianz 1 anpasst).

Die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung ist ein komplexer mathematischer Ausdruck und sollte nicht klausurrelevant sein. Die Verteilungsfunktion lässt sich mathematisch nicht als Funktion darstellen, daher wird zur Ermittlung der Verteilungsfunktion auf Tabellen zurückgegriffen.

Den **Umgang mit der Tabelle der Standardnormalverteilung** musst du sicher beherrschen!

Die Tabelle der Standardnormalverteilung an der Stelle z gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der x einen kleineren Wert als z annimmt. Formal schreibt man:

$$\Phi_{0;1}(z)$$

Beispiele:

1) Eine standardnormalverteilte Zufallsvariable nimmt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,63307 einen kleineren Wert als 0,34 an.

2) Eine Zufallsvariable ist $N\sim(0,1)$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt sie einen Wert unter 1 an?

Antwort: $0{,}84134$

Achtung! Die Tabelle gibt Wahrscheinlichkeiten für $x \geq 0$.Wird nach negativen X-Werten gefragt, so musst du $1 - \Phi_{0;1}(z_1)$ berechnen (Die Normalverteilung ist symmetrisch).

Beispiel: Eine Zufallsvariable ist $N\sim(0,1)$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt sie einen Wert unter -1 an?

Antwort: $1 - 0{,}84134$

Um die Wahrscheinlichkeit zu finden, mit der X in ein bestimmtes Intervall z_1, z_2 fällt, muss die Differenz

$$\Phi_{0;1}(z_2) - \Phi_{0;1}(z_1)$$

gebildet werden.

Beispiel: Eine Zufallsvariable ist $N\sim(0,1)$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt sie einen Wert zwischen 1 und 2 an?

Antwort:

$$\Phi_{0;1}(2) - \Phi_{0;1}(1) = 0{,}97725 - 0{,}84134 = 0{,}13591$$

Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten für normalverteilte Zufallsvariablen

Bei der Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten geht es um die Frage mit welcher Wahrscheinlichkeit eine normalverteilte Zufallsvariable in ein bestimmtes Intervall fällt.

Dabei macht man sich folgenden Zusammenhang zu Nutze:

Sei Z eine standardnormalverteilte Zufallsvariable und X eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2, dann gilt:

Die Wahrscheinlichkeit, dass Z zwischen z_1 und z_2 liegt, ist genau so groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass X zwischen $\mu + z_1\sigma$ und $\mu + z_2\sigma$ liegt.

Um die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, dass X in das Intervall z_1 bis z_2 fällt, muss also X zunächst standardisiert werden.

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Z ist dann standardnormalverteilt.

Die Wahrscheinlichkeit kann dann an der Tabelle der Standardnormalverteilung abgelesen werden.

Achtung: Wenn die Wahrscheinlichkeit gegeben ist und nach dazugehörenden X-Wert gefragt ist, musst du den X-Wert von der standardnormalverteilten Zufallsvariablen in eine normalverteilte Variable transformieren.

Beispiel 1:

Eine Zufallsvariable X ist $N\sim(2{,}3)$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt sie einen Wert kleiner als 4 an?

Antwort: Standardisieren der Zufallsvariable:

$$Z = \frac{4 - 2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}15$$

Z ist nun standardnormalverteilt. Nun muss ermittelt werden, mit welcher Wahrscheinlichkeit Z einen Wert kleiner als $1{,}15$ annimmt.

$$\Phi_{0;1}(1{,}15) = 0{,}87493$$

Beispiel 2:

X ist $N(2,4)$ verteilt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt X einen Wert **größer** als 3 an?

Antwort: 1.Schritt: Zufallsvariable standardisieren!

$$Z = \frac{3-2}{\sqrt{4}} = 0{,}5$$

$$\Phi_{0;1}(0{,}5) = 0{,}69146$$

Da aber nach der Wahrscheinlichkeit für X größer als 3 gefragt war, beträgt die Wahrscheinlichkeit

$$1 - 0{,}69146 = 0{,}30854$$

Die Aufgabenstellung kann natürlich auch lauten: Unter welchem X-Wert liegen 90% der Ausprägungen wenn $X \sim N(2,4)$ verteilt ist? Nun musst du aus der Wahrscheinlichkeit der Tabelle der Standardnormalverteilung den entsprechenden X-Wert ablesen.

Achtung: Wenn die Wahrscheinlichkeit gegeben ist und nach dazugehörenden X-Wert gefragt ist, musst du den X-Wert von der standardnormalverteilten Zufallsvariablen in eine normalverteilten Variable transformieren.

Beispiel: Unter welchem X-Wert liegen 90% der Ausprägungen, wenn $X \sim N(2,4)$ verteilt ist?

$$\Phi^{-1}{}_{0;1}(90\%) \approx 1{,}28$$

Transformation des Wertes 1,28 zu einer $N(2,4)$ –verteilten Zufallsvariablen:

$$X = (1{,}28 * \sigma) + \mu = (1{,}28 * 2) + 2 = 4{,}56$$

Aufgaben zu 10.0

Aufgabe 10.1

Bei einer Fluggesellschaft kommen 5% der gebuchten Fluggäste nicht zum Abflug. Die Fluggesellschaft verkauft 105 Tickets für einen Flug mit 100 Plätzen.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass alle gebuchten Passagiere einen Sitzplatz bekommen. (Nutze in jedem Fall die approximative Normalverteilung).

Aufgabe 10.2

Gegeben sind 2 normalverteilte unabhängige Zufallsvariablen X_1, X_2mit Erwartungswert $\mu_1 = 50$ und $\mu_2 = 30$ sowie Varianz $\sigma_1^2 = 1$ und $\sigma_2^2 = 0{,}5$.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Summe aus zwei zufällig ausgewählten Stichproben zwischen 79 und 81.

Aufgabe 10.3

Bei der Produktion von Glühbirnen darf maximal jede 20te defekt sein. Aus einer Lieferung wird eine Stichprobe von 20 Stück entnommen. Angenommen 10% der Glühbirnen sind defekt, was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Lieferung trotzdem angenommen wird?

Aufgabe 10.4

Gegeben sind 50 unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen X_i , die alle den Erwartungswert 2 und Varianz 1 haben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt die Summe dieser Zufallsvariablen einen Wert unter 102 an?

Aufgabe 10.5

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Jede Normalverteilung ist symmetrisch.

b) Der Median der Normalverteilung ist 0.

c) Für jede Normalverteilung gilt: Median = Modus.

d) Die Summe zweier normalverteilter Zufallsvariablen ist wieder normalverteilt.

e) Die Summe zweier standardnormalverteilter Variablen ist wieder standardnormalverteilt.

Lösungen zu 10.0

Lösung zu 10.1

Die Anzahl an Passagieren, die nicht kommen, ist binomialverteilt mit Erwartungswert $n * p$ und Varianz $np * (1 - p)$.

Erwartungswert und Varianz ergeben sich zu:

$$\mu = 105 * 5\% = 5{,}25$$

$$\sigma^2 = 105 * 5\% * (95\%) = 4{,}99$$

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 5 Fluggäste nicht kommen.

$$P(x > 4) = 1 - P(x \leq 4)$$

Da die Normalverteilung genutzt werden soll, muss die Zufallsvariable standardisiert werden:

$$Z = \frac{4 - 5{,}25}{\sqrt{4{,}99}} = -0{,}56$$

$$1 - P(x \leq 4) = 1 - P(Z \leq -0{,}56)$$

$$P(Z = -0{,}56) = \Phi_{0;1}(-0{,}56) = 0{,}29$$

$$1 - 0{,}29 = 0{,}71$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also 71%.

Lösung zu 10.2

Die Summe aus zwei normalverteilten unabhängiger Zufallsvariablen ist auch wieder normalverteilt. Die Parameter errechnen sich zu:

$$E(X_1 + X_2) = 50 + 30 = 80$$

$$Var(X_1 + X_2) = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$$

$$P(79 \leq X \leq 81) = P(\frac{79 - 80}{\sqrt{1{,}5}} \leq Z \leq \frac{81 - 80}{\sqrt{1{,}5}} = P(-0{,}82 \leq Z \leq 0{,}82)$$

$$\Phi_{0;1}(0{,}82) - \Phi_{0;1}(-0{,}82) = 0{,}79 - (1 - 0{,}79) = 0{,}58$$

Lösung zu 10.3

Hier benötigt man die Verteilungsfunktion der Binomialverteilung:

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$n = 20$

$k = 5\% * 20 = 1$

$p = 10\%$

$P_{n;p}(X \leq k) = 39{,}17\%$

Lösung zu 10.4

Die Summe aus normalverteilten Zufallsvariablen ist wieder normalverteilt. Die Parameter berechnen sich durch Addition (da es keine Faktoren vor den Varianzen gibt, kann auch hier einfach addiert werden).

$$E\left(\sum_{i=1}^{50} X_i\right) = 100$$

$$Var\left(\sum_{i=1}^{50} X_i\right) = 50$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{50} X_i \leq 102\right) = P\left(Z \leq \frac{102-100}{\sqrt{50}}\right) = \Phi_{0;1}(0{,}28) = 61\%$$

Lösung zu 10.5

a) Richtig

b) Falsch. Dies gilt nur für Normalverteilungen mit Erwartungswert 0.

c) Richtig. Normalverteilungen sind symmetrisch und eingipfelig.

d) Richtig.

e) Falsch. Die Parameter ändern sich bei der Addition von Normalverteilungen. Bei Standardnormalverteilungen ändert sich zwar nur die Varianz, aber das Ergebnis ist dennoch keine Standardnormalverteilung mehr.

11.0 Einfache Schätzverfahren

In diesem Kapitel werden Methoden zur Schätzung von Parametern (Meistens Erwartungswert und Varianz) bei unbekannten Wahrscheinlichkeitsverteilungen behandelt.

Einen Schätzer werde ich mit dem Akzent $\widehat{\ }$ kennzeichnen und den zu schätzenden Parameter werde ich, wie auch im Fernuni-Skript, Q nennen.

11.1 Schätzfunktionen und Punktschätzungen

Bei einer Schätzung wird eine Stichprobe aus einer Grundgesamtheit gezogen und die Parameter der Stichprobe werden auf die Grundgesamtheit übertragen. Die Rechenvorschrift für den entsprechenden Parameter wird Schätzfunktion genannt.

Beispiel:

Aus 1000 Menschen werden 100 nach ihrem Körpergewicht gefragt. Der Erwartungswert der 100 Befragten wird als Schätzwert für den Erwartungswert der 1000 Menschen genommen. Die Funktion

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

wird Schätzfunktion genannt.

Wird ein Parameter genau geschätzt, so nennt man das eine Punktschätzung. Man kann auch schätzen, in welchem Intervall ein Parameter mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit liegt (Intervallschätzung), dazu später mehr.

11.2 Eigenschaften von Schätzfunktionen

Zu diesem Kapitel waren die Fragen in Klausuren meist qualitativ. Zu den Eigenschaften von Schätzfunktionen solltest du folgendes wissen:

- Eine Schätzfunktion heißt erwartungstreu oder **unverzerrt (unbiased)**, wenn der Erwartungswert des Schätzers dem wahren Wert des zu schätzenden Parameters entspricht.

-Eine Schätzfunktion heißt **konsistent** wenn sich mit wachsendem N der Erwartungswert des Schätzers dem Wert des wahren Parameters nähert.

- Eine Schätzfunktion heißt **effizient oder wirksam**, wenn sie erwartungstreu ist, der Schätzwert eine endliche Varianz hat und es keine andere erwartungstreue Schätzfunktion gibt, die einen Schätzwert mit geringerer Varianz liefert.

- Der Mittlere quadratische Fehler **(Mean Squared Error-MSE)** einer Schätzfunktion ist der Erwartungswert der quadrierten Differenz zwischen dem Schätzwert und dem tatsächlichen Wert des Parameters.

Mathematisch schreibt man:

$$E(\hat{Q} - Q)^2$$

Eine Schätzfunktion ist effizient, wenn der mittlere quadratische Fehler minimal ist. Für eine erwartungstreue Schätzfunktion ist der mittlere quadratische Fehler gleich der Varianz.

Ein erwartungstreuer Schätzer für die Varianz ist beispielsweise $S^2 * \frac{n}{n-1}$.

11.3 Maximum-Likelihood-Schätzung

Für die Klausur solltest du anschaulich verstanden haben wie die Maximum-Likelihood-Schätzung funktioniert und wie man einen konkreten ML Schätzer berechnet. Auf die Herleitung werde ich hier nicht eingehen.

Anschauliche Erklärung der ML-Schätzung

Bei einer ML-Schätzung ist die Art der Verteilung gegeben und die Parameter sind zu schätzen. Die Frage ist nun: Für welche Parameter ist die gezogene Stichprobe am wahrscheinlichsten?

Beispiel: In New York sind alle Taxis von 1 bis n nummeriert. Du siehst zufällig ein Taxi und es hat die Nummer 10123. Was ist ein ML-Schätzer für die Anzahl an Taxis in NY? (Dieses Beispiel soll dir nur beim Verständnis helfen-Klausuraufgaben werden anders aussehen - später mehr dazu)

Antwort: Man muss sich hier überlegen, welche Zahl es „am wahrscheinlichsten" macht, dass wir zufällig das Taxi mit der Nummer 10123 sehen. Je höher die Zahl der Taxis, desto geringer die Wahrscheinlichkeit, die Nummer 10123 zu sehen. Da es aber mindestens 10123 Taxis gibt, ist die Antwort: 10123 Taxis gibt es wahrscheinlich in NY.

Berechnung eines ML-Schätzers

Vorweg ein Hinweis: In den bisherigen Klausuraufgaben war es nicht notwendig eine ML-Schätzfunktionen herzuleiten und es reichte aus, die ML-Schätzfunktionen für den Erwartungswert der bekannten Verteilungen zu kennen. Diese sind:

$\mu = \bar{x}$ für die Normalverteilung

p für die Binomialverteilung

Die ML Schätzer berechnen sich nach der allgemeinen Schätzfunktion:

$$L(x_1, x_2, \dots x_n; q) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i, q)$$

Die ML-Schätzfunktion nimmt für den ML- Schätzer ein Maximum an. Dieses kann durch Ableitung der ML Funktion nach dem gesuchten Parameter –und Nullsetzen dieser Ableitung- gefunden werden. (In bisherigen Klausuren mußte keine Ableitung berechnet werden.)

11.4 Kleinste-Quadrate-Schätzung

Nach der Methode der kleinsten Quadrate ergibt sich der Schätzer für μ für den Wert, bei dem die Summe der quadrierten Abweichungen minimal wird.

Die Herleitung sollte nicht klausurrelevant sein. Im Ergebnis ist ein KQ-Schätzer für den Mittelwert das Stichprobenmittel $\bar{x}$.

11.5 Konfidenzintervalle

In diesem Kapitel geht es darum, ein Intervall anzugeben, in das X mit einer gegebenen Wahrscheinlichkeit fallen wird.

Beispiel: Es soll geschätzt werden, wie groß ein Kind bei der Geburt maximal sein wird. Das Intervall 0 bis a für die Körperlänge nennt man Konfidenzintervall.

Das Vorgehen ist dabei immer dasselbe. Man ermittelt in welchen Bereich z.B. 95% der Ausprägungen fallen. Zu 95% wird das erwartete Ereignis also eintreten - zu 5% nicht.

Es gibt Intervalle, die nach oben begrenzt sind, nach unten, oder beidseitig. Der Schwerpunkt des nächsten Kapitels liegt auf beidseitigen Tests.

11.6 Konfidenzintervalle für den Mittelwert eines quantitativen Merkmals

In diesem Kapitel geht es um folgende Aufgabenstellung:

Aus einer Grundgesamtheit vom Umfang N mit unbekanntem Mittelwert und bekannter Standardabweichung σ wird eine Stichprobe vom Umfang n gezogen. Es ist nun ein Intervall anzugeben, in das der tatsächliche Mittelwert der Grundgesamtheit mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit (Konfidenz) fallen wird.

Beispiel: Aus einer Grundgesamtheit vom Umfang 100 mit $N(\mu, 16)$-verteiltem X wird eine Stichprobe von $n = 25$ gezogen. Der Mittelwert der Stichprobe ist 15. Gib ein Intervall an in dem der Mittelwert der Grundgesamtheit mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% liegen wird.

Auf eine anschauliche Erklärung werde ich - genau wie die Fernuni- verzichten und gehe direkt zur **Lösung:**

Das Konfidenzintervall für den Mittelwert der Grundgesamtheit erhälst du nach folgender Formel:

$$\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

a ist die Irrtumswahrscheinlichkeit. Da wir ein zweiseitig begrenztes Intervall haben, muß diese halbiert werden. Die Formel sieht etwas unheimlich aus, ist aber ganz einfach. Eigentlich mußt du nur wissen, wie man mit der Tabelle der Standardnormalverteilung umgeht und die Werte in die Formel einsetzen.

$z_{1-\alpha/2}$ erhält man aus der Standardnormalverteilung für gegebenes a.

Der Term $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ ist eine Endlichkeitskorrektur. Die Endlichkeitskorrektur kannst du unter 3 Bedingungen weglassen:

- Die Aufgabenstellung verlangt es (oder N ist garnicht gegeben),

- $\frac{n}{N} < 0{,}05$ gilt,

- die Stichprobe wurde ohne Zurücklegen gezogen.

Als **Beispiel** lösen wir nun das obige Beispiel:

Aus einer Grundgesamtheit vom Umfang 100 mit $N(\mu, 16)$-verteiltem X wird eine Stichprobe von 25 gezogen. Der Mittelwert der Stichprobe ist 15. Gib ein Intervall an, in dem der Mittelwert der Grundgesamtheit mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% liegen wird.

Lösung:

Ermittle den z-Wert und setze in die Formel ein:

$$z_{1-\alpha/2} = z_{1-0{,}05/2} = z_{0{,}975} = 1{,}96$$

$$N = 100$$

$$\sigma = 4$$

$$\bar{X} = 15$$

$$n = 25$$

$$15 - 1{,}96\frac{4}{5}\sqrt{\frac{100-25}{99}} \leq \mu \leq 15 + 1{,}96\frac{4}{5}\sqrt{\frac{100-25}{99}}$$

$$13{,}64 \leq \mu \leq 16{,}36$$

11.7 Konfidenzintervalle bei unbekannter Standardabweichung der Grundgesamtheit

Ist die Standardabweichung der Grundgesamtheit nicht gegeben, so muss sie aus der Stichprobe geschätzt werden und es muss statt der Standardnormalverteilung die t-Verteilung genutzt werden.

Berechnung der Standardabweichung S der Grundgesamtheit

Die Varianz der Stichprobe berechnet man nach folgender Formel:

$$S^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(X_n - \bar{X})^2$$

Nutzung der t-Verteilung

Die t –Verteilung hat neben der Wahrscheinlichkeit noch den Parameter „Freiheitsgrade“. Dieser wird mit v bezeichnet und errechnet sich durch

$$v = n - 1$$

Für mehr als 30 Freiheitsgrade, also einen Stichprobenumfang über 31, gleicht die t-Verteilung der Standardnormalverteilung.

Beispiel:

Der Wert der t-Verteilung für 90% und 10 Freiheitsgrade ist $1{,}812$.

Für die Bestimmung eines Konfidenzintervalls bei unbekannter Grundgesamtheit gilt dann

$$\bar{X} - t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

11.8 Bestimmung des notwendigen Stichprobenumfangs für eine Intervallschätzung

Aus der Berechnung für ein Konfidenzintervall sieht man, dass das Intervall kleiner und damit die Schätzung genauer wird, je größer der Stichprobenumfang n ist.

Man kann also auch fragen: Wie groß muss der Stichprobenumfang mindestens sein, damit das Intervall eine bestimmte Genauigkeit erreicht? Die Genauigkeit der Schätzung wird mit e bezeichnet und es gilt:

$$e = z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Zur Bestimmung von n in Abhängigkeit von der Genauigkeit e des Konfidenzintervalls, bei gegebener Wahrscheinlichkeit, muss die Gleichung

$$z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = e$$

nach n aufgelöst werden.

Man erhält:

$$n \geq \frac{\sigma^2}{e^2} z_{1-\alpha/2}^2$$

Wie auch die Fernuni, habe ich die Endlichkeitskorrektur bei der Berechnung des Stichprobenumfangs vernachlässigt.

Beispiel:

Aus einer Grundgesamtheit vom Umfang 10.000 mit $N(\mu, 16)$-verteiltem X wird eine Stichprobe gezogen. Der Mittelwert der Stichprobe ist 15. Gib an wie groß die Stichprobe mindestens sein muß, damit μ mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% in dem Konfidenzintervall 14,5 bis 15,5 liegt.

Lösung:

Folgende Werte müssen ermittelt werden:

$$\sigma^2 = 16$$

$$z_{1-\alpha/2}^2 = 1{,}96^2 = 3{,}84$$

$$e^2 = 0{,}25$$

$$n \geq \frac{16}{0{,}25} 3{,}84 = 245{,}76$$

Der Stichprobenumfang müßte also 246 betragen.

11.9 Konfidenzintervall für den Anteilswert einer dichotomen Grundgesamtheit

Für ein dichotomes Merkmal ergibt sich das Konfidenzintervall nach folgender Formel:

$$p - \frac{1}{2n} + z_{1-\frac{a}{2}} * \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}\frac{N-n}{N-1}} \leq \Theta \leq p + \frac{1}{2n} + z_{1-\frac{a}{2}} * \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}\frac{N-n}{N-1}}$$

Wobei Θ der zu schätzende Anteil in der Grundgesamtheit ist und p der Anteil in der Stichprobe.

Der Term $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ ist eine Endlichkeitskorrektur. Die Endlichkeitskorrektur kannst du unter 3 Bedingungen weglassen:

- Die Aufgabenstellung verlangt es (oder N ist garnicht gegeben),

- es gilt: $\frac{n}{N} < 0{,}05$ oder

- die Stichprobe wurde ohne Zurücklegen gezogen.

Aufgaben zu 11.0

Aufgabe 11.1

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Eine Schätzfunktion ist genau dann erwartungstreu, wenn sie immer den wahren Parameterwert liefert.

b) Eine Schätzfunktion ist unverzerrt, wenn der Erwartungswert der Schätzfunktion dem wahren Wert des zu schätzenden Parameters entspricht.

c) Das Stichprobenmittel ist ein erwartungstreuer Schätzer für den Erwartungswert der Grundgesamtheit.

d) Von 2 gegebenen erwartungstreuen Schätzfunktionen ist die mit der größeren Varianz effizienter.

e) Eine effiziente Schätzfunktion minimiert den mittleren quadratischen Fehler aller unverzerrten Schätzfunktionen.

f) Eine erwartungstreue Schätzfunktion ist effizient.

Aufgabe 11.2

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Parameter, die aus Stichproben ermittelt werden, sind Zufallsvariablen.

b) Für erwartungstreue Schätzfunktionen ist der mittlere quadratische Fehler gleich der Varianz.

c) Die Stichprobenvarianz $S^2 * \frac{n}{n-1}$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für die Varianz der Grundgesamtheit.

d) Bei endlichen Grundgesamtheiten braucht zwischen „Ziehen mit Zurücklegen“ und „Ziehen ohne Zurücklegen“ nicht unterschieden zu werden.

Aufgabe 11.3

Die Stichprobenvariablen $X_1, X_2, \dots X_n (n > 2$ und gerade) sind unabhängig voneinader und haben dieselbe Verteilung. Gegeben sind die folgenden Schätzfunktionen:

$$T_1 = \frac{1}{2}(X_1 + X_n)$$

$$T_2 = (X_1 + X_2)$$

$$T_3 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2 + X_3 - 2X_n)$$

a) Welche Schätzfunktion ist erwartungstreu?

b) Berechne die Varianz des Schätzers aus T_1.

Aufgabe 11.4

Berechne für eine normalverteilte Zufallsvariable mit unbekanntem Mittelwert und Standardabweichung $\sigma = 600$ ein 95% Konfidenzintervall für den Mittelwert. Der Stichprobenumfang beträgt 25 mit Erwartungswert $\bar{X} = 4000$.

Aufgabe 11.5

Für eine normalverteilte Zufallsvariable mit unbekannten Lageparametern gibt es beim Ziehen mit Zurücklegen folgende Stichprobenergebnisse:

$$8{,}7{,}8{,}5{,}7{,}9{,}7{,}6{,}6$$

Berechne ein Konfidenzintervall zum Niveau $a = 5\%$ für den Mittelwert.

Aufgabe 11.6

Für eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 10 und Varianz 16 wird eine Stichprobe vom Umfang 36 gezogen. Auf Endlichkeitskorrektur soll verzichtet werden.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt der Mittelwert in das Intervall 8,69 bis 11.31?

Aufgabe 11.7

Welche Aussagen sind richtig?

a) Mit einer Wahrscheinlichkeit von a überdeckt das Konfidenzintervall den wahren Parameterwert.

b) Je größer das Konfidenzintervall, desto kleiner a.

c) Je größer das Konfidenzniveau, desto kleiner das Konfidenzintervall.

d) Je größer der Stichprobenumfang, desto kleiner das Konfidenzintervall.

e) Die Grenzen der Konfidenzintervalle sind Stichprobenfunktionen

f) μ ist eine Zufallsvariable

Lösungen zu 11.0

Lösung zu 11.1

a) Falsch. Der Erwartungswert der Schätzfunktion entspricht dem zu schätzenden Parameter.

b) Richtig.

c) Richtig.

d) Falsch. Je kleiner die Varianz, desto effizienter.

e) Richtig.

f) Falsch. Die Bedingungen sind erwartungstreu **und** minimale Varianz.

Lösung zu 11.2

a) Richtig. Die Werte ergeben sich zufällig, da die Stichprobe ja zufällig aus der Grundgesamtheit gezogen wird.

b) Richtig.

c) Richtig.

d) Falsch. Dies ist bei unendlichen Grundgesamtheiten der Fall.

Lösung zu 11.3

a) Hier muss man die Erwartungswerte der Schätzfunktionen berechnen.

$$E(T_1) = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_n)$$

Da gilt: $\mu_1 = \mu_n$ erhält man:

$$E(T_1) = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_n) = \mu$$

Damit ist T_1 ein erwartungstreuer Schätzer.

Entsprechend erhält man für

$$E(T_2) = 2\mu$$

Dies ist also kein erwartungstreuer Schätzer.

Für $E(T_3)$ gilt entsprechend:

$$E(T_3) = 1/2\mu$$

b) $Var(T_1) = \frac{1}{4}(2\sigma^2) = \frac{1}{2}\sigma^2$

Lösung zu 11.4

Diese Aufgaben kommen sehr regelmäßig dran. Du musst nur unterscheiden: Muss eine Endlichkeitskorrektur vorgenommen werden oder nicht? Dann muss in die Formel

$$\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

eingesetzt werden.

Für die Aufgabenstellung ergibt sich:

Untere Grenze:

$$4000 - 1{,}96 * \frac{600}{\sqrt{25}} = 3764{,}8$$

Obere Grenze:

$$4000 + 1{,}96 * \frac{600}{\sqrt{25}} = 4235{,}2$$

Lösung zu 11.5

Da die Varianz unbekannt ist, muss sie aus der Stichprobe geschätzt werden.

Für den Mittelwert der Stichprobe erhält man:

$$\bar{x} = 7$$

$$s^2 = 12/9 \ , \qquad s = 1{,}15$$

Damit ergibt sich

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}15}{3} = 0{,}39$$

Für das Konfidenzintervall ergibt sich entsprechend:

Untere Grenze:

$$\bar{X} - t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Obere Grenze:

$$\bar{X} + t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Der Wert der t-Verteilung für $n - 1 = 8$ Freiheitsgrade zum Niveau $97{,}5\%$ ist $2{,}306$.

Eingesetzt in die obige Formel ergibt sich die untere Grenze zu

$$7 - 2{,}31 * 0{,}39 = 6{,}1$$

und die obere Grenze zu

$$7 + 2{,}31 * 1{,}15 = 7{,}9$$

Lösung zu 11.6

Achte immer darauf, ob die Varianz oder die Standardabweichung gegeben sind. In diesem Fall muss die Formel:

$$\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 8{,}69$$

nach $z_{1-\alpha/2}$ aufgelöst werden (Dies ist die Formel für die Abweichung nach unten. Man hätte auch die Formel für die Abweichung nach oben nutzen können).

$$10 - \frac{4z_{1-\alpha/2}}{6} = 8{,}69$$

$$z_{1-\alpha/2} = (-8{,}69 + 10)1{,}5 = 1{,}96$$

Für 1,96 folgt aus der Tabelle der Standardnormalverteilung eine Wahrscheinlichkeit von 97,5%. Daraus folgt $a = 5\%$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also 95%.

Lösung zu 11.7

a) Falsch. Die genannte Wahrscheinlichkeit ist $1 - a$.

b) Richtig. a ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Konfidenzintervall den wahren Parameter nicht überdeckt. Je größer das Intervall, desto eher überdeckt es den wahren Parameter.

c) Falsch. Will man ganz sicher gehen, dass der wahre Parameter von dem Konfidenzintervall überdeckt wird, so muss man das Intervall sehr groß wählen.

d) Richtig. Im Extremfall entspricht die Stichprobe der Grundgesamtheit und man kann den wahren Parameter direkt angeben. (Zu all den Fragen zu diesen Zusammenhängen kannst du einfach in die Formel schauen und ablesen ob z.B. ein hohes n das Konfidenzintervall vergrößert oder verkleinert.)

e) Richtig.

f) Falsch. Es ist eine feste aber unbekannte Größe.

12.0 Grundlagen der Testtheorie

In diesem Kapitel werden wir uns ausschließlich mit Parametertests befassen.

12.1 Einführung in die Systematik eines statistischen Testes

Bei einem Parametertest werden Annahmen (Hypothesen) über einen Parameter anhand einer Stichprobe getestet.

Beispiel: Ich habe einen Würfel und möchte testen, ob er einen Mittelwert von 3,5 hat. Ich führe also eine Stichprobe durch indem ich mehrmals würfel. Es gibt nun zwei Möglichkeiten:

1) Der Mittelwert der Stichprobe liegt in der Nähe von 3,5.

2) Der Mittelwert der Stichprobe liegt weit entfernt von 3,5.

Im ersten Fall, ist es gut möglich, dass der Mittelwert meines Würfels 3,5 ist, er könnte aber auch 3,6 oder 3,4 sein.

Im zweiten Fall kann ist es sehr unwahrscheinlich, dass der Mittelwert des Würfels bei 3,5 liegt. Ich lehne also die Hypothese ab.

Hieraus lernst du eine sehr wichtige Eigenschaft von Hypothesentests: **Man kann eine Hypothese nur widerlegen, nicht bestätigen!**

Um trotzdem einen Nutzen aus Hypothesentests zu ziehen, müssen Hypothesen wie folgt formuliert werden:

Man formuliert immer zwei Hypothesen:

Zunächst die zu testende Hypothese (genannt „Gegenhypothese“) und dann eine Hypothese, die alle anderen Fälle einschließt (genannt „Nullhypothese“). Kann man die Nullhypothese widerlegen, so muss zwangsläufig die Gegenhypothese gelten.

Beispiel: Ich möchte testen ob der Mittelwert meines Würfels außerhalb des Intervalls von 3 bis 4 liegt. Dazu stelle ich folgende Hypothesen auf:

Nullhypothese: Der Mittelwert des Würfels liegt zwischen 3 und 4.

Gegenhypothese: Der Mittelwert des Würfels liegt außerhalb des Intervalls 3-4.

Kann ich aufgrund der Stichprobe die Nullhypothese widerlegen, so muss der wahre Mittelwert zwangsläufig außerhalb des Intervalls 3-4 liegen.

Fehler bei statistischen Tests

Es gibt bei jedem statistischen Test die Möglichkeit, Fehlschlüsse aus der Stichprobe zu ziehen. Es können die folgenden 2 Fehler gemacht werden:

- Ablehnung einer richtigen Nullhypothese („**Fehler 1.Art**“).

- Nicht-Ablehnung einer falschen Nullhypothese („**Fehler 2.Art**“).

Beim Fehler 1. Art wird tatsächlich eine falsche Entscheidung getroffen. Man nimmt die Gegenhypothese an, obwohl diese falsch ist.

Beim Fehler 2. Art wird keine Entscheidung getroffen, obwohl man eine hätte treffen können.

Daher ist es wichtiger den Fehler 1. Art zu vermeiden. Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1.Art wird bei jedem Test angegeben. Man nennt sie auch „Konfidenzniveau“.

12.2 Der Aufbau von Parametertests

Der Aufbau eines Parametertests lässt sich folgendermaßen untergliedern:

1) Festlegung der Grundgesamtheit und Typ der Verteilung
   - Handelt es sich um ein quantitatives oder qualitatives Merkmal?
   - Ist die Grundgesamtheit endlich?
   - Wie ist die Verteilung der Grundgesamtheit (meistens normalverteilt)?
2) Formulierung der Nullhypothese (H_0) und der Gegenhypothese (H_1).
3) Festlegung der Testgröße
   - Der zu testende Parameter muss aus der Stichprobe geschätzt werden. In Diesem Schritt wird die Schätzfunktion bestimmt.
4) Bestimmung der Verteilung der Testgröße
   - Testgröße ist meistens in der Stichprobe genauso verteilt wie in der Grundgesamtheit. Hier wird angenommen, dass die Nullhypothese gilt.
5) Vorgabe der Irrtumswahrscheinlichkeit
   - Oft wir $a = 5\%$ gewählt.
6) Bestimmung des Ablehnungsbereichs
   - Nun ermittelt man den Bereich, in den die Testgröße unter den getroffenen Annahmen und der Annahme der Nullhypothese zu $(1 - a)\%$ fallen wird. Der restliche Bereich ist der Ablehnungsbereich. Achte darauf ob es ein einseitiger Test ist (> oder < Bedingung) oder ein 2 seitiger (Intervall für den Parameter).
7) Ziehung der Stichprobe und Bestimmung der Testgröße
8) Testentscheidung
9) Interpretation der Entscheidung
   - **Achtung**: Statistische Tests unterliegen immer dem Risiko, dass ein Fehler 1. oder 2. Art vorliegt! Daher sagt man auch: “Das Testergebnis ist signifikant zum Niveau $(1 - a)\%$ abgesichert“.

Beispiel:

Die Brenndauer von Glühbirnen sei normalverteilt mit $\sigma = 5$ Wochen. Nach Angaben des Herstellers sei der Mittelwert der Brenndauer mindestens 100 Wochen. Zur Prüfung der mittleren Brenndauer zum Niveau 5% wird eine Stichprobe von 25 Stück aus einer Lieferung aus 1000 Glühbirnen gezogen. Die Ziehung der Glühbirnen ergibt einen Mittelwert von 97 Wochen

1) - Merkmal ist quantitativ

- Grundgesamtheit ist begrenzt auf 1.000.

- Zufallsvariable ist normalverteilt.

2) Da zu testen ist, ob die mittlere Brenndauer über 100 Wochen beträgt, wählen wir als Gegenhypothese $H_1: \mu_0 \geq \mu$.

Daraus folgt für die Nullhypothese: $H_0: \mu_0 < \mu$.

3) Testgröße ist der Stichprobenmittelwert $\bar{X}$.

4) Da X normalverteilt ist, ist auch $\bar{X}$ normalverteilt. Der Mittelwert der Stichprobe ist $\mu_0 = 100$ und $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (auf Endlichkeitskorrektur wird verzichtet, da $25/1000 < 0{,}05$)

5) Als Signifikanzniveau wird $a = 0{,}05$ vorgegeben.

6) $\bar{X}$ ist normalverteilt mit $E(X) = 100$ und Varianz $\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2 = 1$.
Unter der Annahme, dass die Nullhypothese wahr ist, werden 95% der Ausprägungen in den Bereich unterhalb von

$$\bar{X} - z_{1-a}\sigma_{\bar{X}} = 100 - 1{,}65 * 1 = 98{,}35$$

Fallen (siehe Kapitel 11.5 bis 11.7 zur Berechnung der Konfidenzintervalle). Der Ablehnungsbereich der Nullhypothese ist damit $\bar{X} \geq 98{,}35$.

7) Nun wird die Stichprobe gezogen. Die mittlere Brenndauer beträgt laut Aufgabenstellung 97 Wochen.

8) Die Testgröße fällt nicht in den Ablehnungsbereich. Daher kann H_0 nicht abgelehnt werden.

9) Da die Nullhypothese nicht abgelehnt werden konnte, kann auch keine signifikante Aussage über die mittlere Brenndauer der Glühbirnen gemacht werden.

Für die Klausur:

Du solltest noch wissen, was das Produzentenrisiko und was das Konsumentenrisiko ist:

Wird eine Lieferung über eine Stichprobe auf ihre Güte überprüft und darf eine bestimmte Fehlerquote nicht überschritten werden, so gibt es die folgenden Möglichkeiten Fehler zu machen:

1) Die Lieferung überschreitet die Fehlerquote, dies wird aber nicht entdeckt.
2) Die Lieferung überschreitet die Fehlerquote nicht, wird aber als „Fehlerquote überschritten“ reklamiert.

Der Fall 1) ist das Konsumentenrisiko, da der Konsument eine fehlerhafte Lieferung kauft.

Der Fall 2) ist das Produzentenrisiko, da eine einwandfreie Lieferung als fehlerhaft reklamiert wird.

Aufgaben zu 12.0

Aufgabe 12.1

1) Gib an, bei welchen der folgenden Probleme ein einseitiger und bei welchen ein zweiseitiger Test zu verwenden ist:

a) Mindestkörpergröße von Polizeibeamten

b) Abweichung der Glasdicke von Windschutzscheiben vom Mittelwert

c) Brenndauer von Wachskerzen sei größer als vier Stunden

d) Untersuchung über die Gewichtszunahme der Deutschen

e) Der HSV hat bei einem Spiel höhere Siegchancen als der FC St. Pauli

2) Was wird bei einem einseitigen Test geprüft?

3) Was wird bei einem zweiseitigen Test geprüft?

4) Was bedeutet das Signifikanzniveau α?

5) Was bedeutet es für die Nullhypothese, wenn diese nicht abgelehnt wird?

6) Ändert man bei einem Test nur das Signifikanzniveau von 5% auf 1%, dann

a) wird der Ablehnungsbereich größer.

b) wird der Ablehnungsbereich kleiner.

7) Bei der Berechnung der Verteilung der Prüfgröße wird

a) die Annahme der Nullhypothese als wahr angenommen.

b) die Annahme der Gegenhypothese als wahr angenommen.

8) Welchen Einfluß hat eine Erhöhung des Stichprobenumfanges auf einen Fehler 2.Art?

9) Der Hersteller von Glühbirnen beliefert seinen Abnehmer mit einer Lieferung von 10.000 Glühbirnen. Der Abnehmer überprüft die Lieferung durch eine Stichprobe von 100 Stück. Wenn mehr als 5% defekt sind sendet er die Lieferung als defekt zurück. Was ist das Produzentenrisiko?

Aufgabe 12.2

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Eine Vervierfachung des Stichprobenumfangs führt zu einer Halbierung der Breite des Konfidenzintervalls.

b) Verwirft man die Nullhypothese zum Niveau 5%, so würde man sie auch zum Niveau 10% verwerfen.

c) Ein Fehler 2.Art bedeutet eine falsche Nullhypothese nicht abzulehnen.

d) Durch einen höheren Stichprobenumfang steigt die Wahrscheinlichkeit eine falsche Hypothese auch abzulehnen.

e) Der Ablehnungsbereich ist unabhängig von der Stichprobe.

f) Wird die Nullhypothese zum Niveau α verworfen, so gilt die Alternativhypothese mit einer Wahrscheinlichkeit von α.

g) Die Fehler erster und zweiter Art steigen und fallen gemeinsam mit einer Veränderung von α.

h) Die nachzuweisende Hypothese sollte stets als Nullhypothese gewählt werden.

i) Ein trennscharfer Test verwirft die falsche Nullhypothese mit großer Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe 12.3

Formuliere die Nullhypothese und die Alternativhypothese zu folgendem Test:

Es soll geprüft werden, ob sich die Prüfgröße A im letzten Jahr mindestens verdoppelt hat. A bezeichnet die aktuelle Prüfgröße, A_{-1}die vom letzten Jahr.

Lösungen zu 12.0

Lösung zu 12.1

1) Immer wenn nur die Abweichung in eine Richtung geprüft werden soll, ist ein einseitiger Test gefragt. Soll auf Abweichung nach oben und unten geprüft werden, muss ein 2-seitiger Test genutzt werden.

a) einseitig

b) zweiseitig

c) einseitig

d) einseitig

e) einseitig

2) Es wird geprüft ob ein Parameter mindestens einen gegebenen Wert hat, gegen die Alternative, dass der Wert größer **bzw.** kleiner ist.

3) Es wird geprüft, ob ein Parameter einen gegebenen Wert hat, gegen die Alternative, dass der Wert größer **oder** kleiner ist.

4) Es bedeutet, dass H_0abgelehnt wird, obwohl es zutrifft.

5) Dies bedeutet nur, dass sie nicht abgelehnt wird - es bedeutet nicht, dass sie angenommen wird!

6) Antwort b ist richtig. Je weniger man ablehnt, desto „feiner“ die Auslese für die Ablehnung der Nullhypothese.

7) Antwort a ist richtig.

8) Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2ter Art verringert sich. Je höher der Stichprobenumfang, desto genauer die Schätzung.

9) Das Produzentenrisiko besteht darin, dass die Lieferung zurückgesendet wird, obwohl sie nicht defekt ist.

Lösung zu 12.2

a) Richtig. In der Formel steht Wurzel aus n im Nenner.

b) Richtig. Je größer a desto eher verwirft man die Nullhypothese.

c) Richtig.

d) Richtig. Durch höhere Stichprobenumfänge steigt die Qualität des Tests.

e) Falsch. Siehe Formel für den Ablehnungsbereich.

f) Falsch. Die Alternativhypothese gilt dann mit Wahrscheinlichkeit $1 - a$.

g) Falsch. Die Fehler erster und zweiter Art sind gegenläufig bei Veränderungen von a.

h) Falsch. Es sollte die Alternativhypothese gewählt werden, da nur die statistisch belegt werden kann.

i) Richtig.

Lösung zu 12.3

$$H_0: A < 2A_{-1}$$

$$H_1: A \geq 2A_{-1}$$

13.0 Spezielle Testverfahren

In diesem Kapitel werden Tests für Parameter und für ganze Verteilungen besprochen. Für die Vorbereitung auf die Klausur musst du wissen, wie die Hypothesen aufgestellt werden und mußt die Teststatistiken berechnen können. Du findest fast alles, was du zur Lösung der Aufgaben benötigst im Glossar.

Alle Tests sind nach dem Muster, dass du aus 12.2 kennst aufgebaut.

13.1 Tests für den Mittelwert

Vergiss bei Tests zum Mittelwert nicht, das Glossar zu nutzen. Dort steht genau drin, wann du Endlichkeitskorrektur nutzen musst, wann die Normalverteilung und wann die t-Verteilung usw.

Die Testgröße ist der Mittelwert der Stichprobe.

Der Annahmebereich für die Nullhypothese, dass der Mittelwert einem bestimmten Wert μ_0 entspricht, ist:

- für einen zweiseitigen Test:

$$\mu_0 - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq \bar{X} \leq \mu_0 + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

wobei μ_0 der hypothetische Mittelwert ist.

- für einen einseitigen Test entsprechend

$$\bar{X} \leq \mu_0 + z_{1-a}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

- oder

$$\mu_0 - z_{1-a}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq \bar{X}$$

Beispiel:

Folgende Daten sind für eine normalverteilte Zufallsvariable gegeben:

Mittelwert der Stichprobe: 10

Varianz der Grundgesamtheit: 36

$N = 100$

$n = 25$

$a = 10\%$

Es soll getestet werden ob der Mittelwert der Grundgesamtheit mindestens 9 ist. Auf Endlichkeitskorrektur soll verzichtet werden.

Antwort:

Als Nullhypothese wählt man:

$$H_0: \mu < \mu_0$$

gegen

$$H_1: \mu \geq \mu_0$$

μ_0 ist der hypothetische Wert 9.

Der Annahmebereich für die Nullhypothese ist:

$$\bar{X} \leq \mu_0 + z_{1-a}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{X} \leq 9 + 1{,}28\frac{6}{5}$$

$$\bar{X} \leq 10{,}54$$

Da $\bar{X} = 10$, kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden.

Bei **unbekannter Standardabweichung** der Grundgesamtheit muss diese durch die Stichprobenvarianz geschätzt werden und es muss die t-Verteilung genutzt werden. Details hierzu siehe 11.7.

13.2 Tests für die Varianz

Als Testgröße für die Varianz wird die Stichprobenvarianz s^2 verwendet. Der Annahmebereich der Nullhypothese ergibt sich für

- zweiseitige Tests zu:

$$\frac{\sigma_0^2 \chi^2_{\frac{a}{2};n-1}}{n-1} \leq s^2 \leq \frac{\sigma_0^2 \chi^2_{1-\frac{a}{2};n-1}}{n-1}$$

- einseitige Tests zu

$$\frac{\sigma_0^2 \chi^2_{a;n-1}}{n-1} \leq s^2$$

bzw.

$$s^2 \leq \frac{\sigma_0^2 \chi^2_{1-a;n-1}}{n-1}$$

Wobei σ_0^2 die angenommene Varianz ist und $\chi^2_{a;n-1}$ die Chi Quadrat Verteilung mit n -1 Freiheitsgraden zum Niveau a.

Beispiel:

Es soll getestet werden, ob die Varianz einer Grundgesamtheit von 25 verschieden ist.

Es wird eine Stichprobe vom Umfang $n = 36$ genommen und der Test soll zum Niveau $a = 10\%$ durchgeführt werden.

Lösung:

Für die Null- und die Alternativhypothese gilt:

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

Dies ist ein zweiseitiger Test. Der Annahmebereich der Nullhypothese beträgt:

$$\frac{\sigma_0^2 \chi^2_{\frac{a}{2};n-1}}{n-1} \leq s^2 \leq \frac{\sigma_0^2 \chi^2_{1-\frac{a}{2};n-1}}{n-1}$$

$$\frac{25 * 22{,}47}{35} \leq s^2 \leq \frac{25 * 49{,}8}{35}$$

$$16{,}5 \leq s^2 \leq 35{,}57$$

Liegt also die Stichprobenvarianz außerhalb des Annahmebereichs, so kann die Nullhypothese verworfen werden.

13.3 Test für den Vergleich zweier Mittelwerte

Es soll getestet werden, ob zwei Grundgesamtheiten denselben Mittelwert haben.

Als Testgröße für die Differenz zweier Mittelwerte wird natürlich die Differenz der beiden Stichprobenmittelwerte genommen:

$$D = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$$

Hier muss nun unterschieden werden, ob die Standardabweichungen der beiden Grundgesamtheiten bekannt sind, oder nicht.

13.3.1 Bekannte Standardabweichungen

Dies ist der einfachere Fall. Der Annahmebereich der Nullhypothese ist dann:

$$-z_{1-\frac{a}{2}} * \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq D \leq z_{1-\frac{a}{2}} * \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Beispiel:

Aus zwei Grundgesamtheiten wird eine Stichprobe von jeweils 16 gezogen. Die Varianz der ersten Grundgesamtheit ist 25, die der zweiten ist 36. Teste mit $a = 5\%$ ob die beiden Mittelwerte verschieden sind.

Lösung:

Als Hypothesen stellt man auf:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

Der Annahmebereich berechnet sich zu:

$$-1{,}96 * \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{36}{16}} \leq D \leq 1{,}96 * \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{36}{16}}$$

Fällt D außerhalb von diesem Intervall, so wird H_0 verworfen.

13.3.2 Unbekannte Standardabweichungen

Jetzt muss weiter unterschieden werden, ob die Stichprobenumfänge jeweils größer als 30 sind. Ist dies der Fall, so verwendest du statt der bekannten Varianz einfach die Varianz der beiden Stichproben.

Ist der Stichprobenumfang ≤ 30, so verwendest du für den Annahmebereich der Nullhypothese folgende Formel:

$$-z_{1-\frac{a}{2}} * \sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} \leq D \leq z_{1-\frac{a}{2}} * \sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

Wie du siehst, bestehen die Aufgaben zu diesen Themen oft nur daraus, Tabellenwerte und Werte aus der Aufgabenstellung in Formeln einzusetzen!

13.4 Test für den Vergleich zweier Varianzen

Testet man die Varianzen von zwei Grundgesamtheiten auf Gleichheit, so ist die Testgröße

$$F^* = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

Diese folgt einer F-Verteilung mit $N-1$ und $M-1$ Freiheitsgraden. Was eine F-Verteilung ist, oder wie man sie berechnet, brauchst du nicht zu wissen, nur wie man Werte aus der Tabelle der F-Verteilung abliest!

Der Annahmebereich der Nullhypothese für F^* ist

$$\frac{1}{F_{1-\frac{a}{2};N-1;M-1}} \leq F^* \leq F_{1-\frac{a}{2};N-1;M-1}$$

Beispiel: Die Varianzen zweier Verteilungen sollen auf Ungleichheit geprüft werden. Eine Stichprobe liefert als Ergebnis $\frac{s_1^2}{s_2^2} = 0{,}75$. Getestet werden soll zum Niveau $a = 10\%$. Der Stichprobenumfang war jeweils 20.

Als Nullhypothese formuliert man:

$H_0: \frac{s_1^2}{s_2^2} = 0$, $H_1: \frac{s_1^2}{s_2^2} \neq 0$

Der Annahmebereich beträgt

$$\frac{1}{F_{0{,}95;19;19}} \leq F^* \leq F_{0{,}95;19;19}$$

bzw.

$$0{,}46 \leq F^* \leq 2{,}17$$

13.5 Test über den Anteilswert einer dichotomen Grundgesamtheit

Zu testen ist $\theta = \theta_0$,

wobei θ_0 der angenommene Anteilswert der Grundgesamtheit ist.

Als Testgröße wird der Anteilswert der Stichprobe P verwendet.

Der Annahmebereich der Nullhypothese für P wird wie folgt ermittelt:

Aus der Verteilungsfunktion $F_X(x)$ der Binomialverteilung sucht man als untere Grenze den Wert x, bei dem F_X den Wert $\frac{a}{2}$ gerade überschreitet und als obere Grenze den Wert x, bei dem F_X den Wert $1 - \frac{a}{2}$ gerade überschreitet.

Beispiel: Aus einer dichotomen Grundgesamtheit vom Umfang $N = 500$ soll der Anteilswert θ auf $\theta_0 = 0{,}2$ mit $a = 0{,}05$ geprüft werden. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 20$ wird erhoben.

Als obere Grenze wird der Wert ermittelt, bei dem F_X den Wert $1 - \frac{a}{2}$ gerade überschreitet:

$$F_X(x) \geq 0{,}975$$

Für $n = 20$ und $p = 0{,}2$ erhält man den Wert t für die obere Grenze.

Oft kann die Binomialverteilung durch die Normalverteilung approximiert werden.

Dafür muss gelten:

$$\theta_0 n(1 - \theta_0) > 9$$

P ist dann näherungsweise normalverteilt mit Erwartungswert θ_0 und Varianz $\theta_0(1 - \theta_0)$.

Der Annahmebereich berechnet sich dann nach den Regeln für normalverteilte Zufallsvariablen.

13.6 Test von Hypothesen über Verteilungen

Es wird unterschieden zwischen Anpassungstests und Unabhängigkeitstests.

13.6.1 Anpassungstests

Bei dem sogenannten Chi Quadrat Anpassungstest wird getestet, ob eine Grundgesamtheit einer bestimmten Verteilung folgt. Dafür werden die in der Stichprobe beobachteten Häufigkeiten h_{oi}mit den Häufigkeiten der hypothetischen Verteilung h_{ei} verglichen.

Als Prüfgröße nutzt man:

$$\chi_*^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(h_{oi} - h_{ei})^2}{h_{ei}}$$

Dabei ist m die Anzahl an Merkmalsausprägungen (bzw. Merkmalsklassen bei stetigen Merkmalen). Es muss gelten $h_{ei} \geq 5$, ansonsten kann die Verteilung nicht verwendet werden.

Dies ist ein einseitiger Test und die obere Annahmegrenze ist der Wert der Chi Quadrat Verteilung mit $m - 1$ Freiheitsgraden und Signifikanzniveau $1 - a$.

Beispiel:

Es sollgeprüft werden, ob eine Verteilung nicht der Gleichverteilung folgt. Als Signifikanzniveau wird $a = 10\%$ bestimmt. Eine Stichprobe liefert folgende Ergebnisse:

Merkmalsausprägung	h_{oi}	h_{ei}	$h_{oi} - h_{ei}$	$(h_{oi} - h_{ei})^2$	$(h_{oi} - h_{ei})^2/h_{ei}$
1	8	10	-2	4	0,4
2	9	10	-1	1	0,1
3	7	10	-3	9	0,9
4	11	10	1	1	0,1
5	12	10	2	4	0,4
6	10	10	0	0	0
7	9	10	-1	1	0,1
8	9	10	-1	1	0,1
				Summe:	2,1

Als Nullhypothese gilt H_0: Die Verteilung ist eine Gleichverteilung gegen die

Alternativhypothese: H_1: Die Verteilung ist keine Gleichverteilung.

Die Prüfgröße nimmt den Wert 2,1 an. Die obere Grenze für die Nullhypothese ist

$$\chi^2_{(1-a;m-1)} = 12{,}02 > 2{,}1$$

Die Annahme der Gleichverteilung kann also nicht abgelehnt werden.

13.6.2 Der Unabhängigkeitstest

Mit dem Unabhängigkeitstest wird die Abhängig zweier Merkmale X und Y getestet. Dazu werden wieder die eingetretenen und die zu erwartenden Häufigkeiten miteinander verglichen. Die bei Unabhängigkeit zu erwartende Häufigkeit ergibt sich für die Randhäufigkeiten $h(x_i)$ und $h(y_j)$ zu:

$$h_{eij} = \frac{h(x_i) * h(x_j)}{n}$$

Die Testgröße ist dann:

$$\chi_*^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(h_{oij} - h_{eij})^2}{h_{eij}}$$

wobei r die Anzahl an Ausprägungen von X und s die Anzahl an Ausprägungen von Y bezeichnet.

Die Nullhypothese ist immer die Unabhängigkeit der beiden Merkmale. Der Ablehnungsbereich für die Nullhypothese ist

$$\chi_*^2 > \chi_{(1-a,v)}^2$$

wobei v die Anzahl an Freiheitsgeraden bezeichnet. Diese berechnen sich zu $v = (r-1) * (s-1)$.

H_0 wird also abgelehnt, wenn die Testgröße größer ausfällt als $\chi_{(1-a,v)}^2$.

Beispiel:

Die folgenden Werte sollen auf statistische Abhängigkeit zu $a = 10\%$ geprüft werden:

$Y\backslash X$	x_1	x_2	x_3	Summe
y_1	50	30	20	100
y_2	15	10	35	60
y_3	15	10	15	40
Summe	8	50	70	200

Die bei Unabhängigkeit zu erwartenden Werte wären:

$Y\backslash X$	x_1	x_2	x_3	Summe
y_1	40	25	35	100
y_2	24	15	21	60
y_3	16	10	14	40
Summe	80	50	70	200

Als Differenz erhält man:

$Y\backslash X$	x_1	x_2	x_3
y_1	10	5	-15
y_2	-9	-5	14
y_3	-1	0	1

und für $\frac{(h_{oij}-h_{eij})^2}{h_{eij}}$:

$j\backslash i$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	Summe
$j=1$	2,50	1,00	6,43	9,93
$j=2$	3,38	1,67	9,33	14,38
$j=3$	0,06	0,00	0,07	0,13
Summe	5,94	2,67	15,83	24,44

Für χ_*^2 ergibt sich also ein Wert von 24,44. Die Nullhypothese der Unabhängigkeit kann nun abgelehnt werden, wenn dieser Wert größer ist als $\chi^2_{(1-a,v)}$.

Für $v = 2 * 2 = 4$ Freiheitsgrade erhält man:

$$\chi^2_{(0,9;4)} = 7,78$$

Daher kann die Nullhypothese abgelehnt werden.

13.7.1 Der Vorzeichentest

Beim Vorzeichentest werden 2 Merkmale mit beliebigen Verteilungen darauf getestet, ob sie dieselben Verteilungen haben. Dazu bildet man die Differenzen zu jedem Merkmalswert und zählt die positiven und die negativen. Sind beide Merkmale gleich verteilt, dann misst die Anzahl an positiven Abweichungen genauso groß sein wie die der negativen. Die Summe aus „Anzahl der positiven Abweichungen“ minus „Anzahl der negativen Abweichungen“ müsste Null sein.

Dazu wird die Differenz der einzelnen Merkmalswerte gemessen:

$$Z_i = X_i - Y_i$$

Die Testgröße ist

$$D_i = \begin{cases} 1\ falls\ Z_i positiv\ ist \\ 0 falls\ Z_i negativ\ ist \end{cases}$$

Die Summe aller D_i ist dann binomialverteilt mit $B(n; 0{,}5)$. Die Annahmegrenzen werden anhand der Binomialverteilung bestimmt, indem man die Werte x bestimmt, für die die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ den Wert $\frac{a}{2}$ bzw. $1 - \frac{a}{2}$ annimmt.

Beispiel:

Für 2 Merkmale soll für $a = 0{,}1$ getestet werden, ob sie dieselbe Verteilung haben. Es liegen folgende Daten vor:

i	1	2	3	4	5	6
X_i	3	4	7	4	6	8
Y_i	8	6	2	9	8	2

$X_i - Y_i$	-5	-2	5	-5	-2	6
D_i	0	0	1	0	0	1

i	7	8	9	10	11	12
X_i	3	4	7	6	1	2
Y_i	8	9	7	4	5	0

$X_i - Y_i$	-5	-5	0	2	-4	2
D_i	0	0	1	1	0	1

Die Nullhypothese ist, daß beide Merkmale dieselbe Verteilung haben.

Die Summe aller D_i ist 5 und B(12;0,5) verteilt. Als untere und obere Grenze für den Annahmebereich erhält man:

Obere Grenze: 9

Untere Grenze: 3

Die Prüfgröße liegt also im Annahmebereich und die Nullhypothese kann nicht verworfen werden.

13.7.2 Der Vorzeichen-Rang-Test

Der Vorzeichen-Rang Test ist dem Vorzeichen Test sehr ähnlich. Auch hier soll getestet werden, ob 2 Merkmale mit unbekannter Verteilung derselben Verteilung unterliegen.

Wie beim Vorzeichentest wird erst die Differenz Z_i ermittelt. Die Differenzen werden dann je nach Vorzeichen in 2 Klassen eingeteilt und innerhalb dieser Klassen der Größe nach sortiert. Dann werden Ihnen Rangzahlen zugeordnet. Haben 2 Differenzen denselben Wert, so wird der Mittelwert der beiden Rangzahlen vergeben. Dann wird die Summe über die Rangzahlen der jeweiligen Klassen gebildet. Die Testgröße ist die kleinere der beiden Summen. Ansonsten gelten die Regeln für den Vorzeichentest.

(Zu Vorzeichentests gab es in den letzten 20 Jahren nur 6 Aufgaben - 2 davon aber in 2008 und 2010.)

Aufgaben zu 13.0

Aufgabe 13.1

Für eine normalverteilte Zufallsvariable mit Varianz 1,9 wird eine Stichprobe vom Umfang 16 genommen. Der Erwartungswert und die Varianz der Stichprobe betragen 4,82 und 1,9. Der Umfang der Grundgesamtheit ist 100. Es soll zu $a = 5\%$ getestet werden ob der Mittelwert der Grundgesamtheit mindestens 5 beträgt.

Aufgabe 13.2

Aus einer unabhängig normalverteilten Grundgesamtheit wird folgende Stichprobe gezogen:

5,5 5 0,5 2 4 3 6

Die Varianz der Grundgesamtheit beträgt 10.

Es soll die Nullhypothese

$$H_0: \mu_0 = 2$$

zum Niveau $a = 0{,}05$ getestet werden.

Aufgabe 13.3

Gegeben sind 2 normalverteilte Grundgesamtheiten. Es werden 2 Stichproben jeweils vom Umfang 200 genommen. Es ergaben sich aus der Stichprobe folgende Parameter:

$$\bar{X}_1 = 26$$

$$\bar{X}_2 = 24$$

$$\sigma_1^2 = 120$$

$$\sigma_2^2 = 300$$

Teste zum Niveau $a = 0{,}05$ die Hypothese $\mu_1 = \mu_2$.

Aufgabe 13.4

Für 2 Merkmale X und Y ergibt sich nach einer Stichprobe vom Umfang 200 folgende Häufigkeitsverteilung:

Y\X	x_1	x_2	x_3	Summe
y_1	24	16	10	50
y_2	10	46	34	90
y_3	6	18	36	60
Summe	40	80	80	200

Überprüfe die beiden Merkmale auf statistische Unabhängigkeit zum Niveau $a = 0{,}05$.

Aufgabe 13.5

Überprüfe mit Hilfe eines Chi Quadrat Anpassungstestes, ob das Merkmal X mit folgender Stichprobenverteilung

X	1	2	3	4
$h(x)$	10	20	15	25

der folgenden Verteilung folgt:

Y	1	2	3	4
$h(y)$	12	25	13	20

Wähle $a = 0{,}05$.

Lösungen zu 13.0

Lösung zu 13.1

Dies ist ein Parametertest über den Mittelwert. Die Stichprobe ist ohne Zurücklegen und $\frac{n}{N}$ ist größer als 0,05. Daher muß mit Endlichkeitskorrektur gearbeitet werden.

Als Nullhypothese formuliert man:

$$H_0: \mu < \mu_0$$

Mit der Alternativhypothese :

$$H_1: \mu \geq \mu_0$$

Der Ablehnungsbereich für die Nullhypothese ist dann:

$$\bar{X} > \mu + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

$$\mu + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = 5 + 1{,}64 \frac{\sqrt{1{,}9}}{\sqrt{16}} \sqrt{\frac{84}{99}} = 5{,}52$$

Die Nullhypothese kann also nicht abgelehnt werden.

Lösung zu 13.2

Der Stichprobenmittelwert beträgt 3,71.

Der Stichprobenumfang beträgt 7.

Es handelt sich um einen zweiseitigen Test. Da N nicht gegeben ist, wird auf Endlichkeitskorrektur verzichtet.

Der Annahmebereich errechnet sich nach der Formel:

$$\mu - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Alle benötigten Werte sind bekannt und man muss nur einsetzen:

$$2 - 1{,}96 * \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{7}} \leq \bar{X} \leq 2 + 1{,}96 * \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{7}}$$

$$-0{,}35 \leq \bar{X} \leq 4{,}35$$

Daher kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden.

Lösung zu 13.3

Dies ist ein Differenzentest.

Für D gilt:

$$D = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 = 2$$

Die Nullhypothese formulieren wir als H_0: $\mu_1 = \mu_2$

Mit der Alternativhypothese H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$:

Der Annahmebereich berechnet sich nach:

$$-z_{1-\frac{a}{2}} * \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq D \leq z_{1-\frac{a}{2}} * \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$-1{,}65 * \sqrt{\frac{120}{200} + \frac{300}{200}} \leq D \leq 1{,}65 * \sqrt{\frac{120}{200} + \frac{300}{200}}$$

$$-2{,}39 \leq D \leq 2{,}39$$

Da $D = 2$, kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden.

Lösung zu 13.4

Für die Berechnung der Teststatistik benötigst du die unter Unabhängigkeit erwarteten Häufigkeiten:

Y\X	x_1	x_2	x_3	Summe
y_1	10	20	20	50
y_2	18	36	36	90
y_3	12	24	24	60
Summe	40	80	80	200

Aus den beiden Verteilungen berechnet man die Testgröße:

$$\chi_*^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{(h_{oij} - h_{eij})^2}{h_{eij}}$$

Für die Daten erhält man:

$$\chi_*^2 = 42{,}34$$

Der Ablehnungsbereich für die Nullhypothese:“Die Merkmale sind unabhängig verteilt“ ist:

$$\chi_*^2 > \chi_{(1-a,v)}^2$$

Für $v = (r-1) * (s-1) = 4$ erhält man $\chi_{(0{,}95;4)}^2 = 9{,}49$.

Die Nullhypothese kann also abgelehnt werden.

Lösung zu 13.5

Die Nullhypothese ist: „X folgt der angegebenen Verteilung“

Berechne zunächst:

$$\chi_*^2 = \sum_{i=1}^{m}\frac{(h_{oi} - h_{ei})^2}{h_{ei}} = 2{,}89$$

Die Nullhypothese kann abgelehnt werden, wenn gilt:

$$2{,}89 > \chi_{(1-a,m-1)}^2 = \chi_{(0{,}95,3)}^2 = 7{,}81$$

Die Nullhypothese kann also nicht abgelehnt werden.

Anhang

Die Determinante einer Matrix

Eine Determinante ist eine Funktion, die einer quadratischen Matrix eine Zahl zuordnet.

Wichtig sind zunächst die Determinanten für 2 x 2 und 3 x 3 Matrizen.

Die Determinante einer 2 x 2 Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ berechnet sich nach

$$Det\ \boldsymbol{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Die Komponenten der Hauptdiagonalen werden miteinander multipliziert und das Produkt der Komponenten der Nebendiagonalen wird davon subtrahiert. Da das schwer verständlich ist, hier konkret:

Die Determinante einer 3 x 3 Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ berechnet sich nach

$$Det\ \boldsymbol{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31+}a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

Um sich diese Rechenregel leichter zu merken, solltest du dir die einzelnen Produkte grafisch veranschaulichen. Dazu setzen wir die ersten zwei Spalten hinten an die Matrix ran:

Die ersten drei Produkte sind die Produkte aus den folgenden drei eingezeichneten Diagonalen.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Die zweiten drei Produkte sind die Produkte aus den folgenden drei eingezeichneten Diagonalen.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Die Subtraktion der 3 Nebendiagonalen der erweiterten Matrix von den Hauptdiagonalen nennt man die **Regel von Sarrus**.

Achtung: Die Regel von Sarrus gilt nur für 3 x 3 Matrizen!

Übungsklausuren

Grundlagen der Wirtschaftsmathematik

und Statistik

Übungsklausur Nr.1

fernuni-online.de

©

Soenke Semmelhaack

Schulstraße 2

25377 Kollmar

www.fernuni-online.de

soenke@fernuni-online.de

Teil I Mathematik

Aufgabe 1.1

Berechne die erste Ableitung der folgenden Funktion:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x}$$

Aufgabe 1.2

Gegeben sei folgende Kostenfunktion:

$$K(x) = x^3 - 5x^2 + 8x + 10$$

Berechne die kostenminimale Gütermenge.

Aufgabe 1.3

Berechne das folgende Integral:

$$\int_0^2 3(x+1)^2 dx$$

Aufgabe 1.4

Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = e^x$$

und

$$g(x) = x$$

Es soll die Fläche berechnet werden, die von den beiden Funktionen im Intervall 0 bis 2 eingeschlossen wird. Gib die Fläche als Differenz der Stammfunktionen an (Rechne keinen Zahlenwert aus).

Aufgabe 1.5

Berechne

$$x = \cos\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$$

Aufgabe 1.6

Gegeben seien folgende Vektoren:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, x^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sind die Vektoren linear abhängig?

Aufgabe 1.7

Berechne den Abstand des Punktes $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ von der Geraden $(4 \quad 3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 2 = 0.$

Liegt der Punkt in Richtung des Orthogonalenvektors?

Aufgabe 1.8

Gegeben sei der Produktionsvektor

$$\boldsymbol{q} = (50{,}80{,}120)^T$$

und die Matrix der Produktionskoeffizienten

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Es sollen die tatsächlichen Verkaufsmengen berechnet werden.

Teil II Statistik

Aufgabe 1.1

Welche der folgenden Merkmale sind diskret?

a) Lebensalter.
b) Anzahl an weiblichen Studenten an der Fernuni.
c) Anteil an weiblichen Studenten an der Fernuni.
d) Anzahl der Sonnenstunden im August 2011.
e) Keines der Merkmale.

Aufgabe 1.2

Gegeben seien folgende Daten über die Lebensdauer 10 Hunden derselben Rasse:

Alter	1	5	8	9	10	11	12	12	13	15

Berechne Mittelwert (arithmetisches Mittel), Varianz, und Modus der Verteilung.

Aufgabe 1.3

Gegeben seien folgende Daten zu zwei Merkmalen x und y:

	1	2	3	4	5
X	10	12	15	10	13
Y	30	35	17	28	40

Berechne den Pearsonschen Korrelationskoeffizienten.

Aufgabe 1.4

Gegeben sei die Regressionsfunktion $\hat{y} = a + bx$ mit folgenden Werten:

$$n = 4$$

$$\bar{y} = 10$$

$$\bar{x} = 12$$

$$\sum x_i y_i = 1.200$$

$$\sum x_i^2 = 800$$

a) Berechne a und b.
b) Berechne $\widehat{y_5}$ (für $x = 5$).

Aufgabe 1.5

Ein Student schreibt zwei Klausuren an der Fernuni. Mathe und Internes Rechnungswesen. Mathe besteht er zu 60% und Internes Rechnungswesen unabhängig davon zu 80%.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit beide Klausuren zu bestehen.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit nur eine der beiden Klausuren zu bestehen.
c) Berechne die Wahrscheinlichkeit mindestens eine der beiden Klausuren zu bestehen.
d) Berechne die Wahrscheinlichkeit Mathe zu bestehen, aber Internes Rechnungswesen nicht.

Aufgabe 1.6 (nicht mehr klausurrelevant)

Eine Zufallsvariable hat Erwartungswert 5 und Standardabweichung 2. Die genaue Verteilung ist nicht bekannt. Schätze mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyscheff mit welcher Wahrscheinlichkeit X mehr als 4 von seinem Mittelwert abweicht.

Aufgabe 1.7

Aus zwei Grundgesamtheiten wird eine Stichprobe von jeweils 10 gezogen. Die Varianz der ersten Grundgesamtheit ist 16, die der zweiten ist 25. Teste mit $\alpha = 5\%$ ob die beiden Mittelwerte verschieden sind. Gegeben sei:

$$D = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 = 5$$

Lösungen Teil I

Lösung 1.1

Nutzung der Kettenregel:

$$f'(x) = 0{,}5(x^2 + x)^{-0{,}5} * (2x + 1)$$

Lösung 1.2

Gesucht ist die Nullstelle der ersten Ableitung.

$$K'(x) = 3x^2 - 10x + 8 = 0$$

Die Lösung kann man mit der p-q-Formel berechnen. In den allermeisten Fällen kann man sie aber auch raten/ablesen.

In diesem Fall ergibt sich:

$$x = 2$$

Lösung 1.3

$$[(x + 1)^3]_0^2 = 27 - 1 = 26$$

Lösung 1.4

Die beiden Funktionen haben keinen Schnittpunkt.

Die Fläche ist damit:

$$[F(x) - G(x)]_0^2$$

Lösung 1.5

$$x = \frac{(1 \quad 2 \quad 1) * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| * \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{3}{\sqrt{6} * \sqrt{5}} = 0{,}55$$

Lösung 1.6

Es ist das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$a + 2b + 2c = 0$$

$$2a + 4b + 3c = 0$$

$$b + c = 0$$

Aus der dritten Gleichung folgt

$$b = -c$$

Eingesetzt in die erste Gleichung:

$$a - 2c + 2c = 0$$

$$a = 0$$

a=0 und b=-c setzt man in die zweite Gleichung ein:

$$-4c + 3c = 0$$

Daher sind die 3 Vektoren linear unabhängig.

Lösung 1.7

Erstellen der Hesseschen Normalform:

$$\|a\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\frac{4}{5} * x_1 + \frac{3}{5} * x_2 - \frac{2}{5} = 0$$

Einsetzen des Punktes:

$$\frac{4}{5} * 2 + \frac{3}{5} * 2 - \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$$

Der Abstand ist positiv->Der Punkt liegt in Richtung des Orthogonalenvektors.

Lösung 1.8

Zunächst wird die Matrix $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}$ gebildet:

$$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}2 & 1 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Multipliziert mit **q** ergibt sich:

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}) * \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 42 \\ 10 \\ 72 \end{pmatrix}$$

Lösungen Teil II

Lösung 1.1

Anzahlen sind diskret. Antwort: b, d.

Lösung 1.2

Der Mittelwert ist $\frac{1+5+8+9+10+11+12+12+13+15}{10} = 9{,}6$.

Die Varianz beträgt 15,24.

Modus ist die 12, da dieser Wert am häufigsten angenommen wird.

Lösung 1.3

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\tilde{s}_x * \tilde{s}_y}$$

Folgende Tabelle spiegelt die einzelnen Rechenschritte wider:

	1	2	3	4	5	Summe
X	10	12	15	10	13	60
Y	30	35	17	28	40	150
$\bar{x}$	12	12	12	12	12	
$\bar{y}$	30	30	30	30	30	
$\bar{x} - x$	-2	0	3	-2	1	
$(\bar{x} - x)^2$	4	0	9	4	1	18
$(\bar{y} - y)$	0	5	-13	-2	10	
$(\bar{y} - y)^2$	0	25	169	4	100	298
$(\bar{x} - x) * (\bar{y} - y)$	0	0	-39	4	10	-25

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\tilde{s}_x * \tilde{s}_y} = \frac{-5}{\sqrt{3{,}6} * \sqrt{59{,}6}} = \frac{-5}{1{,}9 * 7{,}72} = -0{,}34$$

Lösung 1.4

a) Die Berechnung erfolgt nach folgenden Formeln:

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

$$b = \frac{1.200 - 480}{800 - 576} = 3{,}21$$

$$a = 10 - 3{,}21 * 12 = -28{,}52$$

b)

$$\widehat{y_5} = -28{,}52 + 3{,}21 * 5 = -12{,}47$$

Lösung 1.5

a) $0{,}6 * 0{,}8 = 48\%$
b) $0{,}6 * 0{,}2 + 0{,}4 * 0{,}8 = 44\%$
c) $44\% + 48\% = 92\%$ oder $1 - 0{,}4 * 0{,}2 = 92\%$
d) $0{,}6 * 0{,}2 = 12\%$

Lösung 1.6 (nicht mehr klausurrelevant)

Die Ungleichung von Tschebyscheff lautet:

$$P(\mu - c\sigma \leq X \leq \mu + c\sigma) \geq 1 - \frac{1}{c^2}$$

$c\sigma$ ist die Abweichung vom Mittelwert. Diese darf maximal 4 sein. Es gilt also:

$c * 2 = 4$

Daraus folgt $c = 2$.

Für die Wahrscheinlichkeit, dass X **weniger** als 4 von seinem Mittelwert abweicht folgt dann

$$P(|X - \mu| \leq 1) \geq 1 - \frac{1}{4}$$

Dass X mehr als 4 von seinem Mittelwert abweicht, ist entsprechend

$$1 - \ P(|X - \mu| \leq 1) = \ P(|X - \mu| > 1) < 0{,}25$$

(Diese Aufgabe weicht von der im Video besprochenen Aufgabe ab).

Lösung 1.7

Als Hypothesen stellt man auf:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

Der Annahmebereich berechnet sich zu:

$$-z_{1-\frac{a}{2}} * \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq D \leq z_{1-\frac{a}{2}} * \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$-1{,}96 * \sqrt{\frac{16}{10} + \frac{25}{10}} \leq D \leq 1{,}96 * \sqrt{\frac{16}{10} + \frac{25}{10}}$$

$$-3{,}97 \leq D \leq 3{,}97$$

Da D außerhalb des Annahmebereiches liegt, wird die Nullhypothese verworfen.

Grundlagen der Wirtschaftsmathematik

und Statistik

Übungsklausur Nr.2

fernuni-online.de

©

Soenke Semmelhaack

Schulstraße 2

25377 Kollmar

www.fernuni-online.de

soenke@fernuni-online.de

Teil I Mathematik

Aufgabe 2.1

Bestimme die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$
b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

Aufgabe 2.2

Welche der folgenden Stammfunktionen haben als Ableitung folgende Funktion:

$$f(x) = 2$$

a) $F(x) = 2 + x$
b) $F(x) = 3 + 2x$
c) $F(x) = x^2$
d) $F(x) = x^2 + 2$
e) $F(x) = \ln 2x$
f) $F(x) = 2x$

Aufgabe 2.3

Berechne die erste Ableitung der folgenden Funktion:

$$f(x) = x * \sin x^2$$

Aufgabe 2.4

Gegeben sei die folgende Gewinnfunktion in Abhängigkeit des Preises:

$$G(p) = -\frac{1}{3}p^3 + 16p + 10$$

Berechne den gewinnmaximalen Preis.

Aufgabe 2.5

Gegeben seien drei Vektoren:

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sind die Vektoren linear abhängig?

Aufgabe 2.6

Bestimme den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.7

Löse das folgende Gleichungssystem:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Teil II Statistik

Aufgabe 2.1

Welche Aussagen sind richtig?

a) Farben sind nominal skalierbar.
b) Geldbeträge sind kardinal messbar.
c) Geldbeträge sind ordinal messbar.
d) Automarken sind metrisch messbar.
e) Keine der Aussagen ist richtig.

Aufgabe 2.2

Gegeben sind folgende Ausprägungen eines Merkmals:

x	1	3	4	5	8

a) Berechne den Modus.
b) Berechne die Varianz.
c) Berechne den Median.

Aufgabe 2.3

Gegeben ist folgende Häufigkeitstabelle:

	X1	X2	X3
Y1	2	4	4
Y2	8	1	5

Bestimme die relative Häufigkeiten von:

a) $f(Y1|X2)$

b) $f(X3|Y2)$

c) $f(X3)$

Aufgabe 2.4

Für die 2 unabhängigen Zufallsvariablen X und Y gilt:

$$E(X) = 2 \quad Var(X) = 2$$

$$E(Y) = 2 \quad Var(Y) = 3$$

Berechne Erwartungswerte und Varianzen der folgenden Zufallsvariablen:

a) A: $2 + 2X$

b) B: $2X + Y + 2$

Aufgabe 2.5

Eine Zufallsvariable X sei normalverteilt mit Erwartungswert 10 und Varianz 16. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallsvariable einen Wert von 8 oder kleiner annimmt.

Aufgabe 2.6

Es sei eine einfache Zufallsstichprobe vom Umfang n=7 aus einer Normalverteilung gegeben:

0,5 0,7 1 1,5 0,6 1,2 1,1

Berechne den Schätzwert einer erwartungstreuen Schätzfunktion für den Parameter μ.

a) Berechne den ML-Schätzer für μ.
b) Berechne σ^2 mit der Schätzfunktion $s^2 * \frac{n}{n-1}$.

Aufgabe 2.7

Ein Unternehmen stellt Nägel her. Die Länge der Nägel sei normalverteilt mit unbekanntem Mittelwert. Die Standardabweichung ist 1mm. Der Mittelwert soll anhand einer Stichprobe vom Umfang n geschätzt werden. Wie groß muss n mindestens sein, damit das Stichprobenmittel mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,45% um höchstens 0,5mm von μ abweicht?

Lösungen Teil I

Lösung 2.1

a) Die Funktion strebt gegen unendlich.
b) Man bildet die beiden Ableitungen:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x}{1} = 2$$

Lösung 2.2

Die Stammfunktion von

$$f(x) = 2$$

Ist

$$F(x) = 2x + c$$

b) und f) sind also richtig.

Lösung 2.3

Hier muss die Produktregel und die Kettenregel genutzt werden.

$$f'(x) = 1 * \sin x^2 + x * \cos x^2 * 2x$$

Lösung 2.4

Gesucht ist das Maximum der Gewinnfunktion.

$$G'(p) = -p^2 + 16 = 0$$

$$p = 4$$

Lösung 2.5

Zu lösen ist das folgende Gleichungssystem:

$$4a + 4b + 3c = 0$$

$$2a - b + c = 0$$

$$-4a + 2b = 0$$

Aus der dritten Gleichung folgt:

$$b = 2a$$

Eingesetzt in die zweite Gleichung:

$$2a - 2a + c = 0$$

$$c = 0$$

Eingesetzt in die erste Gleichung:

$$4a + 8a = 0$$

Die Vektoren sind linear unabhängig.

Lösung 2.6

1) Das Element a_{11}ist ungleich Null, daher

2) teilen wir durch 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 4 & 9 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3) Um unter dem Element a_{11} Nullen zu erzeugen, wird das 4-fache ($a_{21} = 4$) der ersten Zeile von der zweiten abgezogen und das 1-fache ($a_{31} = 1$) der ersten Zeile von der dritten Zeile abgezogen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Wir beginnen wieder mit 1), versuchen aber nun an der Stelle a_{22} eine Eins zu erzeugen.

4.1) a_{22} ist ungleich Null und daher

4.2) teilen wird Zeile 2 durch 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

4.3) Um unter a_{22} eine Null zu erzeugen, wird das (-1,5)-fache der zweiten Zeile von der dritten subtrahiert.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5) Da keine Zeilenvektoren komplett aus Nullen bestehen, hat die Matrix vollen Rang!

Lösung 2.7

Zunächst wird die Matrix **A** um **b** erweitert:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right)$$

Das Element a_{11}ist schon $= 1$ und wir erzeigen direkt die Nullen unter diesem Element. Die Rechenschritte sind:

- Gleichung II minus $2 *$ Gleichung I

- Gleichung III minus Gleichung I

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{pmatrix} \right.$$

Um an der Stelle a_{22} eine 1 zu erzeugen, wird Gleichung II durch -3 geteilt. Um darunter Nullen zu erzeugen, wird das 7-fache der neuen Gleichung II zu der Gleichung III hinzuaddiert.

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \right.$$

Nun muss noch an der Stelle a_{33} eine 1 erzeugt werden: Gleichung III mit -3 multiplizieren.

Aus der Ergebnismatrix

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

können die Lösungen abgelesen werden:

In der letzten Zeile steht:

$$0x_1 + 0x_2 + x_3 = 2$$

Woraus $x_3 = 2$ folgt.

In der zweiten Zeile steht:

$$0x_1 + 1x_2 + \frac{2}{3}x_3 = -2/3$$

Hier wird $x_3 = 2$ eingesetzt, um $x_2 = -2$ zu erhalten

Genauso werden x_2 und x_3 in Gleichung I eingesetzt, um $x_1 = 3$ zu erhalten.

Lösungen Teil II

Lösung 2.1

a) Richtig (qualitatives Merkmal).
b) Richtig.
c) Richtig.
d) Falsch (qualitatives Merkmal)
e) Falsch.

Lösung 2.2

a) Alle Ausprägungen sind gleich oft gemessen. Daher gibt es keinen Modus.
b) Die Varianz beträgt 5,36.
c) Der Median ist die 4.

Lösung 2.3

Man benötigt die Randverteilung.

	X1	X2	X3	Summe
Y1	2	4	4	10
Y2	8	1	5	14
Summe	10	5	9	24

a) $f(Y1|X2) = 4/5$

b) $f(X3|Y2) = 5/14$

c) $f(X3) = 9/24$

Lösung 2.4

Erwartungswerte zu berechnen ist einfach. Für die Varianzen musst du dir merken:

$$VAR(aX) = a^2 VAR(X)$$

Und für **unabhängige** Zufallsvariablen X und Y gilt

$$VAR(X + Y) = VAR(X) + VAR(Y)$$

a) $E(A) = 2 + 2 * 2 = 6$

$Var(A) = 2^2 * 2 = 8$

b) $E(B) = 2 * 2 + 2 + 2 = 8$

$Var(B) = 2^2 * 2 + 3 = 11$

Lösung 2.5

Standardisieren:

$$Z = \frac{8 - 10}{4} = -0{,}5$$

Der entsprechende Wert der Standardnormalverteilung beträgt:

$$\Phi_{0;1}(-0{,}5) = 1 - 0{,}69146 = 0{,}30854$$

Lösung 2.6

a) Dies ist einfach der Mittelwert von 0,94.
b) Dies ist äquivalent zu 1).
c) Man erhält $s^2 = 0{,}11$ und damit $\sigma^2 = 0{,}13$.

Lösung 2.7

Die Grundgesamtheit wird als unendlich groß angenommen. Es gilt: $\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Der z-Wert für 95,45% ist 2. Es gilt also:

$$2 * \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0{,}5$$

$$n = 16$$

Grundlagen der Wirtschaftsmathematik und Statistik

Übungsklausur Nr.3

fernuni-online.de

©

Soenke Semmelhaack

Schulstraße 2

25377 Kollmar

www.fernuni-online.de

soenke@fernuni-online.de

Teil I Mathematik

Aufgabe 3.1

Berechne die erste Ableitung der folgenden Funktion:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{e^x}$$

Aufgabe 3.2

Bestimme die folgenden Grenzwerte:

a)

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

b)

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

Aufgabe 3.3

Berechne die Stammfunktion zu folgender Funktion:

$$f(x) = x^4 + 2x^2 + 5$$

Aufgabe 3.4

Berechne die Fläche, die zwischen den Funktionen

$$f(x) = x^3$$

und

$$g(x) = x^2$$

Im Intervall 2 bis 4 eingeschlossen wird.

Aufgabe 3.5

Berechne x, sodass es Komponente eines normierten Vektors ist:

$$\binom{a}{x} = LK\binom{1}{4}$$

Aufgabe 3.6

Gegeben seien folgende Vektoren:

$$x^1 = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}, x^3 = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$$

Sind die Vektoren linear abhängig?

Aufgabe 3.7

Berechne den Abstand des Punktes $\binom{1}{2}$ von der Gerade $(4 \quad 3)\binom{x_1}{x_2} - 10 = 0$.

Liegt der Punkt in Richtung des Orthogonalenvektors?

Aufgabe 3.8

Gegeben sei das folgende Simplex Tableau:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	−1	−2	0	0	0	0
0	−1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	6
0	0	1	0	0	1	5

a) Welche Variablen sind in der Basis?
b) Welche Variable sollte als nächstes in die Basis aufgenommen werden.

Teil II Statistik

Aufgabe 3.1

Welche der folgenden Merkmale sind stetig und welche diskret?

a) Wassertemperatur.
b) Bruttosozialprodukt.
c) Anzahl von Firmenpleiten in einem Jahr.
d) Arbeitslosenquote.
e) Anzahl an Arbeitslosen.

Aufgabe 3.2

Gegeben sind folgende Ausprägungen eines Merkmals:

x	1	3	4	5	8

a) Berechne das arithmetische Mittel.
b) Berechne die mittlere absolute Abweichung.
c) Gib die Spannweite an.

Aufgabe 3.3

Gegeben seien folgende Daten zu zwei Merkmalen x und y:

Jahre	1	2	3	4	5
X	15	20	22	18	17
Y	25	22	27	20	30

Berechne den Pearsonschen Korrelationskoeffizienten.

Aufgabe 3.4

Ein fairer 6-seitiger Würfel wird zweimal hintereinander geworfen. X bezeichne das Ergebnis des ersten, Y des zweiten Wurfes.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit von X=2.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit von Y>4.
c) Berechne die Wahrscheinlichkeit von „X=2 und Y>4“.
d) Berechne die Wahrscheinlichkeit von X=2 oder Y>4.

Aufgabe 3.5

Eine Zufallsvariable X sei normalverteilt mit Erwartungswert 5 und Varianz 25. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallsvariable einen Wert von 8 oder kleiner annimmt.

Aufgabe 3.6

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Das Konfidenzintervall zum Niveau 90% überdeckt zu 90% den wahren Parameter μ.

b) Eine Verdopplung des Stichprobenumfangs halbiert das Konfidenzintervall.

c) Eine Vergrößerung des Konfidenzniveaus führt zu einer Verkleinerung des Konfidenzintervalls.

d) Der aus der Stichprobe berechnete Mittelwert $\bar{x}$ liegt bei einem 95% Konfidenzintervall zu 95% innerhalb des Intervalls.

e) keine der Aussagen ist richtig.

Lösungen Teil I

Lösung 3.1

Diese Aufgabe kann durch Nutzung der Quotientenregel und Kettenregel für den Zähler gelöst werden. Ich empfehle aber die Funktion etwas umzustellen und die etwas einfachere Produktregel und die Kettenregel zu nutzen:

$$f(x) = \sqrt{x-1} * e^{-x}$$

$$f'(x) = 0{,}5 * (x-1)^{-0{,}5} * 1 * e^{-x} - e^{-x} * \sqrt{x-1}$$

Lösung 3.2

a) Regel von L'Hospital:

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2}{1} = 12$$

b) Strebt gegen Null

Lösung 3.3

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + 5x + c$$

Lösung 3.4

Die Fläche ist die Differenz der Stammfunktionen im Intervall 2 bis 4.

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + c$$

$$G(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4 + c - (\frac{1}{3}x^3 + c)\right]_2^4 = 64 - 21{,}33 - (2 - 2{,}67) = 41{,}33$$

Lösung 3.5

Länge des Vektors:

$$\sqrt{1+16} = 4{,}12$$

$$x = \frac{4}{4{,}12}$$

Lösung 3.6

Es ist das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$2a + 4b + 2c = 0$$

$$2a + 4b + 3c = 0$$

$$b + c = 0$$

Aus der dritten Gleichung folgt

$$b = -c$$

Eingesetzt in die erste Gleichung:

$$2a - 4c + 2c = 0$$

$$a = c$$

Eingesetzt in die zweite Gleichung:

$$2c - 4c + 3c = 0$$

Dies ist falsch. Die drei Vektoren sind linear unabhängig.

Lösung 3.7

Erstellen der Hesseschen Normalform:

$$\|a\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\frac{4}{5} * x_1 + \frac{3}{5} * x_2 - \frac{10}{5} = 0$$

Einsetzen des Punktes:

$$\frac{4}{5} * 1 + \frac{3}{5} * 2 - \frac{10}{5} = 0$$

Der Abstand ist Null->Der Punkt liegt auf der Gerade.

Lösung 3.8

a) Jede Variable die zum Einheitsvektor gehört ist in der Basis: x_0, x_3, x_4, x_5.
b) Im nächsten Schritt wird die Variable aufgenommen, die den größten negativen Wert in der Zielfunktionszeile hat: x_2.

Lösungen Teil II

Lösung 3.1

Das steige Merkmal kann mehr als abzählbar unendlich viele Ausprägungen annehmen.

a) Stetig.
b) Stetig.
c) Nicht stetig.
d) Stetig.
e) Nicht stetig.

Lösung 3.2

a) Es beträgt 4,2
b) Sie beträgt 1,84
c) Sie beträgt 7.

Lösung 3.3

Hier muss wieder nach Formel eingesetzt werden.

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\tilde{s}_x * \tilde{s}_y} = -0{,}06$$

Lösung 3.4

a) $1/6$
b) $1/3$
c) $1/6 * 1/3 = 1/18$
d) $1 - (5/6 * 4/6)$

Lösung 3.5

Standardisieren:

$$Z = \frac{8-5}{5} = 0{,}6$$

Der entsprechende Wert der Standardnormalverteilung beträgt:

$$\Phi_{0;1}(0{,}6) = 0{,}72575$$

Lösung 3.6

a) Richtig.

b) Falsch. Siehe Formel für das Konfidenzintervall.

c) Falsch. Das Intervall wird größer.

d) Falsch. Das Intervall liegt um $\bar{x}$ herum. Daher liegt $\bar{x}$ immer im Intervall.

Grundlagen der Wirtschaftsmathematik

und Statistik

Übungsklausur Nr.4

fernuni-online.de

©

Soenke Semmelhaack

Schulstraße 2

25377 Kollmar

www.fernuni-online.de

soenke@fernuni-online.de

Teil I Mathematik

Aufgabe 4.1

Berechne die erste Ableitung der folgenden Funktion:

$$f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

Aufgabe 4.2

Berechne den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x * \cos x}{e^x - 1}$$

Aufgabe 4.3

Berechne das folgende Integral:

$$\int_1^4 (x^3 + 2x^2 + x - 3)dx$$

Aufgabe 4.4

Berechne den Abstand des Punktes $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ von der Gerade $(4 \quad 3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} - 5 = 0.$

Liegt der Punkt in Richtung des Orthogonalenvektors?

Aufgabe 4.5

Berechne:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\0 & 1 & 3\\1 & 0 & 2\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 5\\2 & 4\end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.6

Bestimme den mengentheoretischen Durchschnitt des folgenden LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 14 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Aufgabe 4.7

Berechne das Inverse zu folgender Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.8

Für die Produktion zweier Güter A und B auf drei Maschinen M1, M2, M3 sind folgende Daten gegeben:

Bearbeitungszeit	M1	M2	M3
A	1	2	5
B	3	2	1
Max. verfügbare Zeit	50	60	40

Pro Stück werden folgende Gewinne erzielt:

A: 10 Euro pro Stück

B: 12 Euro pro Stück

Formuliere das LOP für die gewinnmaximale Produktion.

Teil II Statistik

Aufgabe 4.1

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Ein qualitatives Merkmal kann man gut mit einem Kreisdiagramm darstellen.
b) Ein qualitatives Merkmal kann man gut mit einem Balkendiagramm darstellen.
c) Ein qualitatives Merkmal kann man gut mit einem Polygonzug darstellen.
d) Zur Darstellung eines qualitativen Merkmals benötigt man eine Koordinatendarstellung.
e) Keine der Aussagen sind richtig.

Aufgabe 4.2

Gegeben sei folgende Häufigkeitsverteilung:

Y\X	2	4	5
1	3	5	8
2	1	2	7
4	5	3	1

Berechne die Kovarianz.

Aufgabe 4.3

Gegeben sei die Regressionsfunktion $\hat{y} = a + bx$ mit den folgenden Varianzen:

$$\tilde{s}_{\hat{y}}^2 = 5$$

$$\tilde{s}_{y}^2 = 45$$

a) Berechne das Bestimmtheitsmaß.

b) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

i) Das Merkmal x erklärt die Änderungen von y gut.

ii) x ist nur einer von vielen Einflussfaktoren auf y.

iii) Zwischen x und y herrscht ein linearer Zusammenhang.

Aufgabe 4.4

Gegeben sind zwei unabhängige Zufallsvariablen X und Y mit folgenden Parametern:

$$E(X) = 2$$

$$E(Y) = 4$$

$$VAR(X) = 4$$

$$VAR(Y) = 9$$

Weiter sei die Zufallsvariable Z=2X+Y-1 gegeben.

a) Berechne E(Z)
b) Berechne VAR(Z)
c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, mit der Z Werte annimmt, die nicht mehr als +- 50 von ihrem Erwartungswert abweichen.

Aufgabe 4.5

Gegeben sind 2 normalverteilte unabhängige Zufallsvariablen X_1, X_2mit Erwartungswert $\mu_1 = 10$ und $\mu_2 = 6$ sowie Varianz $\sigma_1^2 = 1$ und $\sigma_2^2 = 0{,}5$.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Summe aus zwei zufällig ausgewählten Stichproben zwischen 15 und 17.

Aufgabe 4.6

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

a) Die Erhöhung der Lufttemperatur im Zuge des Klimawandels kann mit einem einseitigen Test untersucht werden.
b) Mit einem einseitigen Test kann überprüft werden, ob das Fußballteam A höhere Chancen auf den Meistertitel hat, als Fußballteam B.
c) Ein Signifikanzniveau von 5% bedeutet, dass die Nullhypothese mit maximal 5% abgelehnt wird.
d) Bei einem einseitigen Test wird geprüft ob ein Parameter einen bestimmten Wert annimmt.
e) Keine der Aussagen ist richtig.

Lösungen Teil I

Lösung 4.1

Kettenregel:

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)} * 2x$$

Lösung 4.2

Regel von L'Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{-x * \sin x + \cos x}{e^x} = 1$$

Lösung 4.3

Die Stammfunktion lautet:

$$\frac{1}{4} * x^4 + \frac{2}{3} * x^3 + \frac{1}{2} * x^2 - 3x + c$$

Damit ergibt sich für das bestimmte Integral:

$$\left[\frac{1}{4} * x^4 + \frac{2}{3} * x^3 + \frac{1}{2} * x^2 - 3x\right]_1^4 = 102{,}67 + 1{,}58 = 104{,}25$$

Lösung 4.4

Erstellen der Hesseschen Normalform:

$$\|a\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\frac{4}{5} * x_1 + \frac{3}{5} * x_2 - \frac{5}{5} = 0$$

Einsetzen des Punktes:

$$\frac{4}{5} * 1 + \frac{3}{5} * 1 - \frac{5}{5} = \frac{2}{5}$$

Der Abstand ist positiv->Der Punkt liegt in Richtung des Orthogonalenvektors.

Lösung 4.5

$$\begin{pmatrix} 11 & 26 \\ 7 & 17 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Die 11 ergibt sich z.B. aus: $1 * 1 + 2 * 1 + 4 * 2 = 11$.

Lösung 4.6

Man ermittelt zunächst den Rang der 3 x 3 Matrix und der erweiterten 4 x 3 Matrix.

Den Rang der 3x3 Matrix kann man über die Determinante ermitteln:

$$2 * 0 * 1 + 1 * 1 * 14 + 0 * 1 * 4 - (0 * 0 * 14 + 1 * 1 * 1 + 2 * 1 * 4)$$

$$= 14 - 9 = 5$$

Da die Determinante ungleich Null ist, hat die 3x3 Matrix vollen Rang. Der mengentheoretische Durchschnitt ist ein Punkt.

Lösung 4.7

Erzeugen von 1en in der Hauptdiagonale und Nullen ansonsten:

II-I

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

-1*II

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

III+II

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

I-2*II

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

-1*III

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

II+III

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

I+2*III

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Lösung 4.8

Zielfunktion:

$$\max z = 10a + 12b$$

u.d.N.:

$$a + 3b \leq 50$$

$$2a + 2b \leq 60$$

$$5a + b \leq 40$$

Nichtnegativität:

$$a \geq 0\,;\; b \geq 0$$

Lösungen Teil II

Lösung 4.1

Diagramme, die keine Koordinaten beinhalten sind gut zur Darstellung von qualitativen Merkmalen geeignet.

a) Richtig.
b) Richtig.
c) Falsch.
d) Falsch.
e) Falsch.

Lösung 4.2

Man benötigt die Randverteilung:

Y\X	2	4	5	Summe
1	3	5	8	16
2	1	2	7	10
4	5	3	1	9
Summe	9	10	16	35

Die Kovarianz berechnet man nach der folgenden Formel:

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r}(x_i - \bar{x}) * (y_k - \bar{y}) * h(x_j, y_k)$$

$$\bar{x} = 3{,}94$$

$$\bar{y} = 2{,}06$$

$$Cov(X,Y) = -0{,}57$$

Lösung 4.3

a) $r^2 = \frac{\tilde{s}_{\hat{y}}^2}{\tilde{s}_y^2} = 5/45$

b)

i) Nein. Das Bestimmtheitsmaß nimmt einen relativ kleinen Wert an.

ii) Richtig. Der Großteil der Änderung in y wird nicht durch x erklärt.

iii) Richtig.

Lösung 4.4 (Tschebyscheff ist nicht mehr klausurrelevant)

a) $E(Z) = 2 * 2 + 4 - 1 = 7$
b) $VAR(Z) = 2^2 * 4 + 9 = 25$
c) Man nutzt die Ungleichung von Tschebyscheff:

$$P(\mu - c\sigma \leq X \leq \mu + c\sigma) \geq 1 - \frac{1}{c^2}$$

Aus $c\sigma = 50$ folgt $c = 10$. Die Wahrscheinlichkeit beträgt also $1 - \frac{1}{100} = 99\%$.

Lösung 4.5

Die Summe aus zwei normalverteilten unabhängiger Zufallsvariablen ist auch wieder normalverteilt. Die Parameter errechnen sich zu:

$$E(X_1 + X_2) = 10 + 6 = 16$$

$$Var(X_1 + X_2) = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$$

$$P(15 \leq X \leq 17) = P(\frac{15 - 16}{\sqrt{1{,}5}} \leq Z \leq \frac{17 - 16}{\sqrt{1{,}5}} = P(-0{,}82 \leq Z \leq 0{,}82)$$

$$\Phi_{0;1}(0{,}82) - \Phi_{0;1}(-0{,}82) = 0{,}79 - (1 - 0{,}79) = 0{,}58$$

Lösung 4.6

a) Richtig.
b) Richtig.
c) Falsch. Eine zutreffende Nullhypothese wird mit maximal 5% abgelehnt.
d) Falsch. Es wird immer > oder < geprüft.

Grundlagen der Wirtschaftsmathematik

und Statistik

Übungsklausur Nr.5

fernuni-online.de

©

Soenke Semmelhaack

Schulstraße 2

25377 Kollmar

www.fernuni-online.de

soenke@fernuni-online.de

Teil I Mathematik

Aufgabe 5.1

Gegeben sei folgende Preis-Absatz-Funktion:

$$p(x) = 5 - \frac{1}{2}x$$

Bestimme die Grenzumsatzfunktion und den maximalen Umsatz.

Aufgabe 5.2

Berechne den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

Aufgabe 5.3

Berechne das folgende Integral:

$$\int_0^1 x * \sin x \, dx$$

Aufgabe 5.4

Stelle den Vektor

$$x = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Als Linearkombination der folgenden Vektoren dar:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.5

Gegeben sei der Verkaufsvektor $\boldsymbol{y} = (20{,}40{,}20)^T$ und die Gesamtbedarfsmatrix

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 7 & -2 & 5 \\ 11 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

Berechne den Bruttobedarfsvektor.

Aufgabe 5.6

Bestimme den Rang der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.7

Berechne das Inverse zu folgender Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.8

Gegeben sei das folgende Simplex Tableau:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	−1	−2	0	0	0	0
0	−1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	6
0	0	1	0	0	1	5

a) Bestimme den aktuellen Zielfunktionswert.
b) Bestimme den aktuellen Wert von x_5.

Teil II Statistik

Aufgabe 5.1

Gegeben sei folgende Häufigkeitsverteilung:

x	1	3	5	7	10	15
h(x)	10	10	20	10	25	25

a) Berechne $F(5)$
b) Berechne $f(x < 5)$
c) Berechne $f(3 < x < 10)$

Aufgabe 5.2

Ein Unternehmen kaufte im letzten Jahr dreimal Rohstoffe zu folgenden Preisen:

100 kg zu 100€/kg

150kg zu 60€/kg

100kg zu 50€/kg.

Berechne den Durchschnittspreis.

Aufgabe 5.3

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

a) Sind die Merkmalswerte geordnet, so nehmen Pearsonscher Korrelationskoeffizient und Spearmanscher Rangkorrelationskoeffizient dieselben Werte an.
b) Ist der Pearsonsche Korrelationskoeffizient gleich Null, so sind die Merkmale unabhängig.
c) Sind zwei Merkmale unabhängig, so ist der Pearsonsche Korrelationskoeffizient gleich Null.
d) Der Spearmansche Rangkorrelationskoeffizient kann genutzt werden um den Zusammenhang zwischen einem metrisch messbaren und einem qualitativen Merkmal zu messen.
e) Der Pearsonsche Korrelationskoeffizient kann genutzt werden um den Zusammenhang zwischen einem metrisch messbaren und einem qualitativen Merkmal zu messen.

Aufgabe 5.4

Zwei Zufallsvariablen X und Y besitzen folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Y\X	1	2	5
0	0,1	0,2	0,1
1	0,1	0,3	0,2

a) Berechne E(X)
b) Berechne E(Y)
c) Berechne Cov(X,Y)
d) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

Aufgabe 5.5

Gegeben seien die folgenden Schätzfunktionen:

$$T1 = \frac{X_1 + X_n}{n}$$

$$T2 = \frac{X_1 + X_n}{2}$$

$$T3 = (X_1 + X_2 + 2X_n)/4$$

Die Stichprobenvariablen $X_1 \; bis \; X_n$ sind unabhängig identisch verteilt.

a) Welche Schätzfunktion ist erwartungstreu?
b) Berechne die Varianz von T3.

Aufgabe 5.6

Es soll getestet werden, ob die Varianz einer Grundgesamtheit von 25 verschieden ist.

Es wird eine Stichprobe vom Umfang $n = 16$ genommen und der Test soll zum Niveau $a = 10\%$ durchgeführt werden. Die Stichprobenvarianz beträgt 35.

Lösungen Teil I

Lösung 5.1

Umsatzfunktion:

$$U(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x$$

Grenzumsatzfunktion:

$$U'(x) = -x + 5$$

Diese Funktion hat ein Maximum bei $x = 5$. Dies ist der Maximalumsatz.

Lösung 5.2

Regel von L'Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x}$$

Erneute Anwendung der Regel von L'Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = 0{,}5$$

Lösung 5.3

Die Lösung erfolgt durch partielle Integration. Es gilt:

$$\int u * v' = u * v - \int u' * v$$

$$v' = \sin x$$

$$u = x$$

$$v = -\cos x$$

$$u' = 1$$

$$u * v - \int u' * v = -\mathrm{x} * \cos x - \int -\cos x \; dx = -\mathrm{x} * \cos x + \sin x$$

Für das bestimmte Integral gilt also:

$$[-\mathrm{x} * \cos x + \sin x\,]_0^1 = 0{,}3$$

Lösung 5.4

Das folgende Gleichungssystem muss gelöst werden:

$$+4b + 2c = 5$$

$$2a + 3d = 1$$

$$b + 2d = 4$$

$$a + c = 10$$

Aus Gleichung 3 folgt:

$$b = 4 - 2d$$

Eingesetzt in Gleichung 1:

$$16 - 8d + 2c = 5$$

$$c = 4d - 5{,}5$$

Eingesetzt in Gleichung 4:

$$a + 4d - 5{,}5 = 10$$

$$a = 15{,}5 - 4d$$

Eingesetzt in Gleichung 2:

$$31 - 8d + 3d = 1$$

$$d = 6$$

$$a = -8{,}5$$

$$c = 18{,}5$$

$$b = -8$$

Lösung 5.5

Zunächst berechnet man das Inverse zu der Matrix (Matrixinversion siehe Kapitel 2.2).

Das Inverse beträgt

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Multipliziert mit y ergibt sich:

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} -60 \\ 160 \\ 240 \end{pmatrix}$$

Lösung 5.6

Man berechnet die Determinante nach der Regel von Sarrus:

$$2 * 1 * 2 + 3 * 8 * 1 + 1 * 6 * 0 - (1 * 1 * 1 + 3 * 6 * 2 + 2 * 8 * 0) =$$

$$4 + 24 - 1 - 36 = -9$$

Da die Determinante ungleich Null ist, hat die Matrix vollen Rang.

Lösung 5.7

Erzeugen von 1en in der Hauptdiagonale und Nullen ansonsten:

0,5*II

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

I+II

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

III-II

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/2 & 3/2 & 1/20 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 1 \end{array}\right)$$

2*III

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

II-0,5*III

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

I+0,5*III

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Lösung 5.8

a) Den Zielfunktionswert kann man auf der RHS (Spalte b) als 0 ablesen.
b) x_5 ist aktuell in der Basis und man kann den Wert auf der RHS ablesen. Antwort: 5.

Lösungen Teil II

Lösung 5.1

a) $F(5) = f(5) + f(3) + f(1) = 40\%$
b) $f(x < 5) = f(3) + f(1) = 20\%$
c) $f(3 < x < 10) = f(5) + f(7) = 30\%$

Lösung 5.2

Das Unternehmen hat insgesamt 350kg für insgesamt 24.000€ gekauft. Der Durchschnittspreis beträgt

68,57€/kg.

Lösung 5.3

a) Richtig.
b) Falsch. Es können noch nichtlineare Abhängigkeiten bestehen.
c) Richtig.
d) Richtig.
e) Falsch.

Lösung 5.4

Man bildet zunächst die Randverteilung:

Y\X	1	2	5	Summe
0	0,1	0,2	0,1	0,4
1	0,1	0,3	0,2	0,6
Summe	0,2	0,5	0,3	1

a) $E(X) = 1 * 0{,}2 + 2 * 0{,}5 + 5 * 0{,}3 = 2{,}7$
b) $E(Y) = 0{,}6$
c) $Cov(X,Y) = \sum_{j=!}^{m} \sum_{k=1}^{r} (x_i - \bar{x}) * (y_k - \bar{y}) * f(x_j, y_k) = 0{,}08$
d) Bei stochastischer Unabhängigkeit müsste z.B. gelten:

$$0{,}2 * 0{,}4 = 0{,}1$$

Da dies nicht gilt, sind X und Y nicht stochastisch unabhängig.

Lösung 5.5

a) Für diese Aufgaben benötigt man die Rechenregeln aus Kapitel 9.6. T2 und T3 sind erwartungstreu mit E(T2)=E(T3)=μ und $VAR(T2) = \frac{1}{4} * (\sigma^2 + \sigma^2)$ und

$$VAR(T3) = \frac{1}{16} * (\sigma^2 + 4\sigma^2 + \sigma^2)$$

b) Siehe a).

Lösung 5.6

Für die Null- und die Alternativhypothese gilt:

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

Dies ist ein zweiseitiger Test. Der Annahmebereich der Nullhypothese beträgt:

$$\frac{\sigma_0^2 \chi^2_{\frac{a}{2};n-1}}{n-1} \leq s^2 \leq \frac{\sigma_0^2 \chi^2_{1-\frac{a}{2};n-1}}{n-1}$$

$$\frac{25 * 7{,}26}{15} \leq s^2 \leq \frac{25 * 25}{15}$$

$$12{,}10 \leq s^2 \leq 41{,}67$$

Die Stichprobenvarianz liegt innerhalb des Annahmebereichs, also kann die Nullhypothese nicht verworfen werden.

Grundlagen der Wirtschaftsmathematik

und Statistik

Übungsklausur Nr.6

fernuni-online.de

©

Soenke Semmelhaack

Schulstraße 2

25377 Kollmar

www.fernuni-online.de

soenke@fernuni-online.de

Teil I Mathematik

Aufgabe 6.1

Berechne die erste Ableitung der folgenden Funktion:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$$

Aufgabe 6.2

Gegeben sei die Erlösfunktion

$$E(x) = 4x$$

Und die Kostenfunkton der variablen Kosten:

$$K_v(x) = \frac{1}{3}x^2$$

Berechne die Gesamtkostenfunktion und die Gewinnfunktion. Bestimme das Gewinnmaximum.

Aufgabe 6.3

Berechne die Stammfunktion zu folgender Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \cos x$$

Aufgabe 6 .4

Berechne das folgende Integral:

$$\int_1^2 (2x^3 + x^2 - 1)dx$$

Aufgabe 6.5

Berechne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} * 2 \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.6

Bestimme den mengentheoretischen Durchschnitt des folgenden LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ 14 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Aufgabe 6.7

Berechne das Inverse zu der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.8

Gegeben sei das folgende Simplex Tableau:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	−1	−2	0	0	0	0
0	−1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	6
0	0	1	0	0	1	5

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

a) Eine Erhöhung von $x_1$ist durch eine Verringerung $x_4$möglich.
b) Im nächsten Simplex Schritt sollte x_4 aus der Basis genommen werden, weil diese Variable mit einem Wert von 6 über das größte Potenzial verfügt, den Zielfunktionswert zu steigern.
c) Die aktuelle Lösung ist optimal, da die Zielfunktionszeile nur negative Werte aufweist.
d) Die aktuelle Lösung wird grafisch im x1/x2 Diagramm durch den Nullpunkt repräsentiert.

Teil II Statistik

Aufgabe 6.1

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Ein qualitatives Merkmal kann metrisch und kardinal messbar sein.
b) Beim Übergang von einer metrischen Skala auf eine Ordinalskala gehen Informationen verloren.
c) Metrisch messbare Merkmale können auch auf einer Ordinalskala gemessen werden.
d) Ein Histogramm ist ein Flächendiagramm.
e) Keine der Aussagen ist richtig.

Aufgabe 6.2

Es wurden 200 Menschen nach Geschlecht und Haarfarbe befragt.

Berechne den Kontingenzkoeffizienten für folgende Datentabelle:

Geschlecht\Haar	Hell	Dunkel	Summe
Männlich	20	100	120
Weiblich	50	30	80
Summe	70	130	200

Aufgabe 6.3

Um einen Universitätsabschluss zu erhalten muss ein Student noch 5 Prüfungen bestehen. Für jede Prüfung hat er drei Versuche. Er besteht jeweils die beim ersten Versuch zu 20%, beim zweiten Versuch zu 40% und beim dritten Versuch zu 75%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt der Student seinen Universitätsabschluss?

Aufgabe 6.4

Eine Zufallsvariable X hat den Mittelwert 2 und eine Standardabweichung von 4.

Standardisiere die Zufallsvariable.

Aufgabe 6.5

Eine Zufallsvariable X sei normalverteilt mit Erwartungswert 5 und Varianz 25. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallsvariable einen Wert von über 8 annimmt.

Aufgabe 6.6

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Eine Schätzfunktion heißt erwartungstreu, wenn der Schätzwert im 95% Konfidenzintervall um den wahren Parameter liegt.
b) Eine Schätzfunktion heißt erwartungstreu, wenn sie immer den wahren Parameter liefert.
c) Eine Schätzfunktion heißt erwartungstreu, wenn ihr Erwartungswert immer dem wahren Parameter entspricht.
d) Von zwei Schätzfunktionen ist die mit der niedrigeren Varianz effizient.
e) Keine der Aussagen ist richtig.

Aufgabe 6.7

Gegeben sind die folgenden 4 Zinssätze:

4%, 6%, 10%, 2%.

Berechne das geometrische Mittel.

Lösungen Teil I

Lösung 6.1

Nutzung der Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{1 * (x^2 + 1) - 2x * (x + 1)}{(x^2 + 1)^2}$$

Lösung 6.2

Gesamtkostenfunktion:

$$K(x) = \frac{1}{3}x^3$$

Gewinnfunktion:

$$G(x) = E(x) - K(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$$

Das Maximum der Gewinnfunktion bestimmt man über die Nullstelle der ersten Ableitung:

$$G'(x) = -x^2 + 4 = 0$$

$$x = 2$$

Lösung 6.3

$$F(x) = \ln x + \sin x + c$$

Lösung 6.4

Die Stammfunktion lautet:

$$\frac{1}{2} * x^4 + \frac{1}{3} * x^3 - x + c$$

Damit ergibt sich für das bestimmte Integral:

$$\left[0{,}5x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x\right]_1^2 = 8{,}83 + 0{,}17 = 9$$

Lösung 6.5

Berechnung nicht möglich, da Anzahl der Spalten der ersten Matrix nicht gleich Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix.

Man ermittelt zunächst den Rang der 3 x 3 Matrix und der erweiterten 4 x 3 Matrix.

Dazu erzeugt man Einsen in der Hauptdiagonalen und Nullen darunter:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -3/2 & 1 & 7/2 \\ 0 & 5 & -3 & -7 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2/3 & -7/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 14/3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2/3 & -7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

Die Matrizen haben beide den Rang 3 (Die 3x3 Matrix hat vollen Rang). Der mengentheoretische Durchschnitt ist daher ein Punkt.

Lösung 6.7

Erzeugen von 1en in der Hauptdiagonale und Nullen ansonsten:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

II-2*I

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

½*II

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \end{array}\right)$$

I-2*II

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \end{array}\right)$$

Lösung 6.8

a) Richtig. $x_4$wird durch die dritte Zeile repräsentiert und in dieser Zeile hat x_1 einen positiven Wert.
b) Falsch. Der Wert der RHS ist nur ein Parameter bei der Wahl des Pivotelementes.
c) Falsch. Alle Werte der Zielfunktionszeile müssten positiv sein.
d) Richtig. $x_1$und $x_2$sind beide nicht in der Basis.

Lösungen Teil II

Lösung 6.1

a) Falsch. Es kann nur nominal messbar sein.
b) Richtig.
c) Richtig.
d) Richtig.
e) Falsch.

Lösung 6.2

Hier musst du einfach die richtige Formel finden und einsetzen:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r} \frac{\left(h(x_j, y_k) - \frac{h(x_j) * h(y_k)}{n}\right)^2}{\frac{h(x_j) * h(y_k)}{n}}$$

$$= \frac{\left(20 - \frac{70 * 120}{200}\right)^2}{\frac{70 * 120}{200}} + \cdots = 44{,}32$$

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}} = \sqrt{\frac{44{,}32}{100 + 44{,}32}} = 0{,}43$$

Lösung 6.3

Zunächst berechnet man die Wahrscheinlichkeit eine Prüfung zu bestehen:

$$0{,}2 + 0{,}8 * 0{,}4 + 0{,}8 * 0{,}6 * 0{,}75 = 0{,}88$$

Den Universitätsabschluss bekommt der Student, wenn er alle Prüfungen besteht.

$$0{,}88 * 0{,}88 * 0{,}88 * 0{,}88 * 0{,}88 = 0{,}53$$

Lösung 6.4

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 2}{4}$$

Lösung 6.5

Man berechnet zunächst die Wahrscheinlichkeit von $x \leq 8$:

Standardisieren:

$$Z = \frac{8 - 5}{5} = 0{,}6$$

Der entsprechende Wert der Standardnormalverteilung beträgt:

$$\Phi_{0;1}(0{,}6) = 0{,}72575$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt $1 - 0{,}72575 = 0{,}27425$

Lösung 6.6

a) Falsch.
b) Falsch.
c) Richtig.
d) Falsch. Es fehlen Angaben über die Erwartungstreue.

Lösung 6.7

$$\sqrt[4]{1{,}04 * 1{,}06 * 1{,}1 * 1{,}02} - 1 = 5{,}46\%$$

Grundlagen der Wirtschaftsmathematik

und Statistik

Übungsklausur Nr.7

fernuni-online.de

©

Soenke Semmelhaack

Schulstraße 2

25377 Kollmar

www.fernuni-online.de

soenke@fernuni-online.de

Teil I Mathematik

Aufgabe 7.1

Gegeben sei die Funktion:

$$f(x) = 2x^2 + \frac{x}{a}$$

Für welches a hat die Funktion eine Extremstelle bei x=2?

Aufgabe 7.2

Berechne das folgende Integral:

$$\int_0^2 3(2x+1)^2 dx$$

Aufgabe 7.3

Gegeben seien die folgenden drei Vektoren:

$$\left\{\begin{pmatrix}2\\4\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\6\\16\end{pmatrix}\right\}$$

Stelle den Vektor $x = \begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren dar.

Aufgabe 7.4

Bestimme den Rang der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\4 & 1 & 1\\3 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.5

Berechne das Inverse zu der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 0\end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.6

Gegeben sei das folgende Simplex Tableau:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	−1	−2	0	0	0	0
0	−1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	6
0	0	1	0	0	1	5

a) Ist die aktuelle Lösung optimal? Begründe.
b) Bestimme die Pivotspalte des nächsten Simplex Schrittes.

Aufgabe 7.7

Berechne die Stammfunktion zu folgender Funktion:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4}{x}$$

Aufgabe 7.8

Berechne den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + \sin x}{e^x - 1}$$

Teil II Statistik

Aufgabe 7.1

Welches der folgenden Merkmale ist quantitativ?

a) Telefonnummer.
b) Körpergröße.
c) Automarke.
d) Anzahl an Klausuraufgaben einer Statistikklausur.
e) Blutgruppe.

Aufgabe 7.2

Gegeben sind folgende Ausprägungen eines Merkmals:

x	1	3	4	5	8

Berechne den Variationskoeffizienten.

Aufgabe 7.3

Gegeben sei die Regressionsfunktion

$$\hat{y} = a + bx = 5 + 10x$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Die Regressionsfunktion ermittelt exakte Werte für y.
b) Wird x um eine Einheit erhöht, so erhöht sich $\hat{y}$ um 10.
c) Wird x um eine Einheit erhöht, so wird $\hat{y}$ verzehnfacht.
d) Es besteht auf jeden Fall ein starker linearer Zusammenhang zwischen x und y.
e) Es besteht ein positiver Zusammenhang zwischen x und y.

Aufgabe 7.4

Gegeben seien zwei Zufallsvariablen X und Y mit folgenden Parametern:

$$VAR(X) = 2$$

$$VAR(Y) = 3$$

$$VAR(X + Y) = 9$$

a) Sind X und Y stochastisch unabhängig?
b) Berechne $VAR(2X + Y)$.

Aufgabe 7.5

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

a) Mit der Maximum Likelihood Methode wird μ so geschätzt, dass die Summe der Quadrate der Abweichungen der Stichprobenwerte vom Schätzwert maximiert wird.
b) Wird die erste Ableitung der Maximum Likelihood Funktion nach dem betrachteten Parameter abgeleitet, dann bezeichnet die Nullstelle dieser Ableitung das Maximum der Funktion.
c) Gibt es bei einer Untersuchung nur 2 mögliche Ergebnisse, so heißt die Grundgesamtheit dichotom.
d) Die Standardnormalverteilung hat den Median 0.
e) Keine der Aussagen ist richtig.

Lösungen Teil I

Lösung 7.1

Die erste Ableitung lautet:

$$f'(x) = 4x + \frac{1}{a}$$

Für einen Extremwert bei x=2 wird diese Funktion an der Stelle x=2 zu 0.

$$8 + \frac{1}{a} = 0$$

$$a = -1/8$$

Lösung 7.2

Substitution:

$$2x + 1 = z$$

$$\frac{dz}{dx} = 2$$

$$dx = 0{,}5dz$$

$$\int_0^2 3z^2 * 0{,}5dz = [z^3 * 0{,}5]_0^2$$

Zurück substituieren:

$$[(2x+1)^3 * 0{,}5]_0^2 = 62{,}5 - 0{,}5 = 62$$

Lösung 7.3

Zu lösen ist folgendes Gleichungssystem:

$$2a + 4c = 2$$

$$4a - 2b + 6c = 4$$

$$8a + 2b + 16c = 5$$

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$a = 1 - 2c$$

Eingesetzt in die zweite Gleichung:

$$4 - 8c - 2b + 6c = 4$$

$$b = -c$$

Eingesetzt in die dritte Gleichung:

$$8 - 16c - 2c + 16c = 5$$

$$c = 1{,}5$$

$$b = -1{,}5$$

$$a = -2$$

Lösung 7.4

Man berechnet die Determinante nach der Regel von Sarrus:

$$4 * 1 * 1 + 1 * 1 * 3 + 0 * 4 * 0 - (0 * 1 * 3 + 1 * 4 * 2 + 4 * 1 * 0) =$$

$$4 + 3 - 8 = -1$$

Da die Determinante ungleich Null ist, hat die Matrix vollen Rang.

Lösung 7.5

Erzeugen von 1en in der Hauptdiagonale und Nullen ansonsten:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

0,5*I

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

II-I

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right)$$

I+II

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right)$$

-2/3*II

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & -2/3 \end{array}\right)$$

Lösung 7.6

a) Die aktuelle Lösung ist nicht optimal, da in der obersten Zeile noch negative Werte stehen.
b) Die Pivotspalte ist die Spalte mit dem größten negativen Wert der Zielfunktionszeile (der obersten Zeile). Antwort Spalte x_2.

Lösung 7.7

Die Funktion kann man auch schreiben als:

$$f(x) = 3x + 4x^{-1}$$

$$F(x) = \frac{3}{2}x^2 + 4 * lnx + c$$

Lösung 7.8

Regel von L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{e^x}=\frac{2}{1}=2$$

Lösungen Teil II

Lösung 7.1

a) Nicht quantitativ, obwohl es aus Zahlen besteht.
b) Quantitativ.
c) Nicht quantativ
d) Quantitativ.
e) Nicht quantitativ.

Lösung 7.2

Der Variationskoeffizient ist der Quotient aus Mittelwert und Standardabweichung.

Mittelwert: 4,2

Standardabweichung: 2,32

Variationskoeffizient: 1,81

Lösung 7.3

a) Falsch. Es handelt sich um eine Schätzunktion.
b) Richtig.
c) Falsch.
d) Falsch. Es kann keine Aussage über die Stärke des Zusammenhangs getroffen werden.
e) Richtig.

Lösung 7.4

a) Wären X und Y stochastisch unabhängig, dann würde gelten VAR(X+Y)=VAR(X)+VAR(Y). Dies ist nicht der Fall. Daher sind X und Y nicht stochastisch unabhängig.
b) Man muss zunächst die Kovarianz ermitteln.
Da für stochastisch abhängige Zufallsvariablen gilt:
$$VAR(aX+bY)=a^2*VAR(X)+b^2*VAR(Y)+a*b*COV(X,Y)$$
folgt $COV(X,Y)=4$.
Daher ist
$$VAR(2X+Y)=2^2*2+3+2*4=19$$

Lösung 7.5

a) Falsch.
b) Richtig.
c) Richtig.
d) Richtig.

Grundlagen der Wirtschaftsmathematik

und Statistik

Übungsklausur Nr.8

fernuni-online.de

©

Soenke Semmelhaack

Schulstraße 2

25377 Kollmar

www.fernuni-online.de

soenke@fernuni-online.de

Teil I Mathematik

Aufgabe 8.1

Gegeben sei folgende Funktion

$$f(x) = -0{,}5x^2 + 2 + \frac{125}{x}$$

Berechne eine Nullstelle der ersten Ableitung.

Aufgabe 8.2

Berechne die Stammfunktion zu folgender Funktion:

$$f(x) = x * e^x$$

Aufgabe 8.3

Berechne

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.4

Bestimme den Rang der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.5

Bestimme den mengentheoretischen Durchschnitt des folgenden LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Aufgabe 8.6

Berechne das Inverse zu der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.7

Berechne

$$x = (2 \quad 2) * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Teil II Statistik

Aufgabe 8.1

Bei einer Liegerung aus 100 Sack Zement soll eine Stichprobe von n=16 gezogen werden und das Sollgewicht von mindestens 25kg überprüft werden. Das Gewicht der Säcke sei normalverteilt mit Varianz =16. Der Stichprobenmittelwert beträgt 26kg.

Kann die Lieferung zum Niveau 0,1 angenommen werden? Auf Endlichkeitskorrektur soll verzichtet werden.

Aufgabe 8.2

Eine Zufallsvariable X sei normalverteilt mit Erwartungswert 5 und Varianz 25. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallsvariable einen Wert von über 8 oder unter 2 annimmt.

Aufgabe 8.3

Gegeben sei folgende Verteilungsfunktion:

$$F_X = \begin{cases} 0 \; für \; x < 0 \\ 0{,}3 \; für \; 0 \leq x < 0{,}3 \\ 0{,}6 \; für \; 0{,}3 \leq x < 0{,}5 \\ 1 \; für \; 0{,}5 \leq x \end{cases}$$

Berechne

a) $P(x \leq 0{,}5)$

b) $P(x \leq 1)$

c) $P(0{,}3 \leq x < 0{,}5)$

Aufgabe 8.4

Seien A und B beliebige Ereignisse. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

a) $P(A \cap B) = P(A) * P(B|A)$
b) $P(A \cup B) = 1 - \big(1 - P(A)\big) * \big(1 - P(B)\big)$
c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
d) $P(A) + P(B)$ ist immer kleiner 1.
e) $P(A \cap B)$ ist immer kleiner 1.

Aufgabe 8.5

5 Studenten schreiben die Mathe und die Externes Rechnungswesen Klausur. Folgende Punktzahlen werden erreicht:

Student Nr.	1	2	3	4	5
Mathe	30	55	60	66	85
Ext. Rewe	50	33	55	60	52

Berechne den Spearmanschen Rangkorrelationskoeffizienten.

Aufgabe 8.6

Gegeben sind zwei unabhängige Zufallsvariablen X und Y mit folgenden Parametern:

$$E(X) = 2$$

$$E(Y) = 4$$

$$VAR(X) = 4$$

$$VAR(Y) = 9$$

a) Berechne VAR(2X-3)
b) Berechne VAR(2X+Y)
c) Berechne E(X+2Y)

Lösungen Teil I

Lösung 8.1

Die erste Ableitung dieser Funktion ist:

$$f'^{(x)} = -x - \frac{125}{x^2}$$

Die Nullstelle liegt bei $x = -5$.

Lösung 8.2

Partielle Integration:

$$\int u * v' = u * v - \int u' * v$$

$$u = x$$

$$v = e^x$$

$$u' = 1$$

$$v' = e^x$$

$$\int x * e^x = x * e^x - \int 1 * e^x dx = x * e^x - e^x + c$$

Lösung 8.3

Berechnung nicht möglich, da Zeilen- und Spaltenrang der ersten Matrix nicht denen der zweiten entspricht.

Lösung 8.4

Man berechnet die Determinante nach der Regel von Sarrus:

$$3 * 4 * 2 + 2 * 8 * 0 + 1 * 6 * 0 - (1 * 4 * 0 + 2 * 6 * 2 + 3 * 8 * 0) =$$

$$24 - 24 = 0$$

Die Determinante ist Null. Der Rang der Matrix ist also nicht 3. Da die ersten beiden Zeilen linear unabhängig sind, ist der Rang 2.

Lösung 8.5

Man ermittelt zunächst den Rang der 3 x 3 Matrix und der erweiterten 4 x 3 Matrix.

Den Rang der 3x3 Matrix kann man über die Determinante ermitteln oder direkt erkennen, dass die drei Zeilen nicht linear unabhängig sind (III=4*I+II). Der Rang ist 2. Durch die Erweiterung mit dem Vektor B steigt der Rang nicht. Da der Rang der erweiterten Matrix 1 unter Maximalrang ist, ist der mengentheoretische Durchschnitt eine Gerade.

Lösung 8.6

Erzeugen von 1en in der Hauptdiagonale und Nullen ansonsten:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

0,5*I

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

II-I

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right)$$

2*II

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

I-0,5*II

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Lösung 8.7

$$x = 2 * 1 + 2 * 2 + 2 * 0 + 2 * 1 = 8$$

Lösungen Teil II

Lösung 8.1

Als Nullhypothese wählt man:

$$H_0: \mu < \mu_0$$

gegen

$$H_1: \mu \geq \mu_0$$

Der Annahmebereich für die Nullhypothese ist:

$$\bar{X} < \mu_0 + z_{1-a}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{X} < 25 + 1{,}28\frac{4}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{X} < 26{,}28$$

Die Nullhypothese kann nicht abgelehnt werden.

Lösung 8.2

Man berechnet zunächst die Wahrscheinlichkeit von $x \leq 8$:

Standardisieren:

$$Z = \frac{8-5}{5} = 0{,}6$$

Der entsprechende Wert der Standardnormalverteilung beträgt:

$$\Phi_{0;1}(0{,}6) = 0{,}72575$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt $1 - 0{,}72575 = 0{,}27425$

Da das Intervall symmetrisch um den Mittelwert liegt, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $2 * 0{,}27425 = 0{,}5485$.

Lösung 8.3

a) $P(x \leq 0{,}5) = 0{,}6$
b) $P(x \leq 1) = 1$
c) $P(0{,}3 \leq x < 0{,}5) = 0{,}6 - 0{,}3 = 0{,}3$

Lösung 8.4

a) Richtig.
b) Richtig.
c) Richtig.
d) Falsch. Die Wahrscheinlichkeiten können sich überschneiden.
e) Richtig.

Lösung 8.5

Zunächst müssen die Ränge berechnet werden:

Student Nr.	1	2	3	4	5
Mathe	5	4	3	2	1
Ext Rewe	4	5	2	1	3

Nun müssen die Mittelwerte ermittelt werden:

$$\overline{rg}_X = \overline{rg}_Y = 3$$

Nun müssen die Werte nur noch in die Formel für den Spearmanschen Rangkorrelationskoeffizienten eingesetzt werden. Im einzelnen ergibt sich:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(rg(x_i) - \overline{rg}_X\right)\left(rg(y_i) - \overline{rg}_Y\right)$$
$$= (5-3) * (4-3) + (4-3) * (5-3) + (3-3) * (2-3) + (2-3) * (1-3)$$
$$+ (1-3) * (3-3) = 6$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(rg(x_i) - \overline{rg}_X\right)^2 = 10$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(rg(y_i) - \overline{rg}_Y\right)^2 = 10$$

$$\frac{6}{\sqrt{10 * 10}} = 0{,}6$$

Lösung 8.6

a) $2^2 * 4 = 16$
b) $2^2 * 4 + 9 = 25$
c) $2 + 2 * 4 = 10$

Grundlagen der Wirtschaftsmathematik

und Statistik

Übungsklausur Nr.9

fernuni-online.de

©

Soenke Semmelhaack

Schulstraße 2

25377 Kollmar

www.fernuni-online.de

soenke@fernuni-online.de

Teil I Mathematik

Aufgabe 9.1

Gegeben sei folgende Kostenfunktion:

$$K(x) = x^3 - 10x^2 + 28x + 10$$

Berechne die Kostenminimale Gütermenge.

Aufgabe 9.2

Berechne die Stammfunktion zu folgender Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Aufgabe 9.3

Berechne:

$$x = (1 \quad 2 \quad 3) * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9.4

Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?

$$w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9.5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9.6

Berechne:

$$(1 \quad 4 \quad 1) * \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9.7

Bestimme den mengentheoretischen Durchschnitt des folgenden LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Aufgabe 9.8

Berechne das Inverse zu der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Teil II Statistik

Aufgabe 9.1

Ein Investor legt sein Kapital 2 Jahre an. Die Zinsen betragen:

Jahr 1: 4%

Jahr 2: 5%

Berechne den durchschnittlichen Zinssatz.

Aufgabe 9.2

Die folgende Tabelle gibt den Durchschnittsverbrauch pro 100 km und die jeweils gefahrene Strecke eines Autofahrers an. Berechne den Durchschnittsverbrauch pro 100 km der Gesamtstrecke.

Durchschnittsverbrauch	10,2	9,5	10	10,5	9
Strecke	100	150	200	100	120

Aufgabe 9.3

Die Zufallsvariable X hat den Erwartungswert 4 und die Varianz 16. Die genaue Verteilung ist nicht bekannt.

Gib an in welchen, um den Mittelwert symmetrischen, Intervall X mit mindestens 90% fallen wird.

Aufgabe 9.4

Gegeben ist die Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^3 \text{ für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \qquad\qquad sonst \end{cases}$$

Berechne F_X.

Aufgabe 9.5

Welche der folgenden Aussagen über Hypothesentests sind richtig?

a) Führt ein Test zur Annahme der Nullhypothese, so ist diese statistisch gesichert zum Niveau a.
b) Bei einer zweiseitigen Nullhypothese $H_0: \mu = \mu_0$ wird der Annahmebereich unter der Annahme $\mu = \mu_0$ berechnet.
c) Ein Fehler 2ter Art bedeutet die Entscheidung für die Nullhypothese, obwohl die Gegenhypothese gilt.
d) Eine richtige Nullhypothese wird mit maximal a abgelehnt.
e) Keine der Aussagen ist richtig.

Aufgabe 9.6

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Aus einer Menge unverzerrter Schätzfunktionen ist die effizient, die den mittleren quadratischen Fehler minimiert.
b) Eine erwartungstreue Schätzfunktion ist effizient, wenn sie minimale Varianz hat. Richtig.
c) Eine Schätzfunktion ist eine Zufallsvariable.
d) Eine Stichprobenfunktion ist eine Zufallsvariable.
e) Keine der Aussagen ist richtig.

Lösungen Teil I

Lösung 9.1

Gesucht ist die Nullstelle der ersten Ableitung.

$$K'(x) = 3x^2 - 20x + 28 = 0$$

Die Lösung kann man mit der p-q-Formel berechnen. In den allermeisten Fällen kann man sie aber auch raten/ablesen.

In diesem Fall ergibt sich:

$$x = 2$$

Lösung 9.2

Diese Funktion sollte man anders schreiben:

$$f(x) = x^{-0,5}$$

$$F(x) = 2x^{0,5} + c$$

Lösung 9.3

$$x = 2 + 6 + 3 = 11$$

Lösung 9.4

4 Vektoren im R^3 sind immer linear abhängig.

Lösung 9.5

Berechnung nicht möglich, da Anzahl der Spalten der ersten Matrix nicht gleich Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix.

Lösung 9.6

$$(3 \quad 18)$$

Die 3 ergibt sich z.B. aus: $1 * 2 + 4 * 0 + 1 * 1 = 3$.

Lösung 9.7

Man ermittelt zunächst den Rang der 3 x 3 Matrix und der erweiterten 4 x 3 Matrix.

Den Rang der 3x3 Matrix kann man über die Determinante ermitteln oder direkt erkennen, dass die drei Zeilen nicht linear unabhängig sind (III=4*I+II). Der Rang ist 2. Durch den Vektor b steigt der Rang auf drei. Das Gleichungssystem ist nicht lösbar.

Lösung 9.8

Erzeugen von 1en in der Hauptdiagonale und Nullen ansonsten:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

0,5*I

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

II-2*I

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

0,5*II

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

I-II

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

Lösungen Teil II

Lösung 9.1

Hier ist nach dem harmonischen Mittel gefragt.

$$\sqrt{1{,}04 * 1{,}05} - 1 = 4{,}5\%$$

Lösung 9.2

Es werden insgesamt 670 km gefahren. Der jeweilige Verbrauch muss nun mit der gefahrenen Strecke gewichtet werden.

$$\frac{100}{670} * 10{,}2 + \frac{150}{670} * 9{,}5 + \frac{200}{670} * 10 + \frac{100}{670} * 10{,}5 + \frac{120}{670} * 9 = 9{,}81$$

Lösung 9.3 (nicht mehr klausurrelevant)

Nach Tschebyscheff gilt:

$$P(\mu - c\sigma \leq X \leq \mu + c\sigma) \geq 1 - \frac{1}{c^2}$$

$P(\mu - c\sigma \leq X \leq \mu + c\sigma)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass X in das Intervall $\mu - c\sigma \leq X \leq \mu + c\sigma$ fallen wird. Diese Wahrscheinlichkeit soll 90% sein.

$$0{,}9 = 1 - \frac{1}{c^2}$$

Umgeformt nach c ergibt:

$$c = \sqrt{10}$$

Eingesetzt in die Tschebyscheff Ungleichung:

$$P\left(4 - 16 * \sqrt{10} \leq X \leq 4 + 16\sqrt{10}\right) \geq 0.9$$

Das Intervall ist -46,60 bis 54,6.

Lösung 9.4

$F_X$ist die Stammfunktion zu $f_X(x)$ und nimmt Werte zwischen 0 und 1 an.

$$F_X = \begin{cases} 0 \; für \; x < 0 \\ 0{,}5x^4 \; für \; 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \; für \; x > 1 \end{cases}$$

Lösung 9.5

a) Falsch. Nur die Gegenhypothese kann statistisch gesichert werden.
b) Richtig.
c) Richtig.
d) Richtig.

Lösung 9.6

a) Richtig.
b) Richtig.
c) Richtig.
d) Richtig.

Grundlagen der Wirtschaftsmathematik

und Statistik

Übungsklausur Nr.10

fernuni-online.de

©

Soenke Semmelhaack

Schulstraße 2

25377 Kollmar

www.fernuni-online.de

soenke@fernuni-online.de

Teil I Mathematik

Aufgabe 10.1

Berechne die Fläche, die zwischen den Funktionen

$$f(x) = x^2$$

und

$$g(x) = 2x$$

Im Intervall 1 bis 2 eingeschlossen wird.

Aufgabe 10.2

Berechne x, sodass es Komponente eines normierten Vektors ist:

$$\begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}3 \\ x \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10.3

Berechne

$$(1 \quad 4 \quad 1) * \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10.4

Berechne

$$(1 \quad 4 \quad 1) * 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10.5

Bestimme den mengentheoretischen Durchschnitt des folgenden LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Aufgabe 10.6

Bestimme den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10.7

Berechne den Abstand des Punktes $\binom{2}{2}$von der Gerade $(4 \quad 3)\binom{x_1}{x_2} - 2 = 0.$

Liegt der Punkt in Richtung des Orthogonalenvektors?

Teil II Statistik

Aufgabe 10.1

Eine Zufallsvariable X sei normalverteilt mit Erwartungswert 5 und Varianz 25. Bestimme Intervall, das symmetrisch um den Mittelwert liegt und in das X zu 50% fallen wird.

Aufgabe 10.2

Gegeben sind 10 unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen X_i , die alle den Erwartungswert 2 und Varianz 1 haben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt die Summe dieser Zufallsvariablen einen Wert unter 21 an?

Aufgabe 10.3

Bei der Produktion von Glasflaschen darf maximal jede 50te eine Normabweichung aufweisen. Angenommen 5% aller Glasflaschen weichen von der Norm ab und es wird eine Stichprobe von 50 Stück entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit weichen nur eine oder weniger Glasflaschen aus der Stichprobe von der Norm ab?

Aufgabe 10.4

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Parameter, die aus Stichproben ermittelt werden, sind Zufallsvariablen.

b) Für erwartungstreue Schätzfunktionen ist der mittlere quadratische Fehler gleich der Varianz.

c) Die Stichprobenvarianz $S^2 * \frac{n}{n-1}$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für die Varianz der Grundgesamtheit.

d) Bei endlichen Grundgesamtheiten braucht zwischen „Ziehen mit Zurücklegen“ und „Ziehen ohne Zurücklegen“ nicht unterschieden zu werden.

Aufgabe 10.5

a) Die Grenzen eines Konfidenzintervalls sind Stichprobenfunktionen.
b) Je höher das Konfidenzniveau, desto breiter das Konfidenzintervall.
c) Je höher der Stichprobenumfang, desto kleiner das Konfidenzintervall.
d) Die Grenzen eines Konfidenzintervalls sind fest vorgegeben.
e) Keine der Aussagen ist richtig.

Aufgabe 10.6 (nicht mehr klausurrelevant)

Eine Zufallsvariable hat Erwartungswert 5 und Standardabweichung 2. Die genaue Verteilung ist nicht bekannt. Schätze mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyscheff mit welcher Wahrscheinlichkeit X mehr als 1 von seinem Mittelwert abweicht.

Lösungen Teil I

Lösung 10.1

Da die beiden Funktionen jeweils einen Schnittpunkt bei x=0 und x=2 haben entspricht die eingeschlossene Fläche der Differenz der Stammfunktionen im Intervall 1 bis 2.

$$\left[\frac{1}{3}x^3 + c - (x^2 + c)\right]_1^2 = -2$$

Da Flächen nicht negativ sein können, ist die eingeschlossene Fläche 2.

Lösung 10.2

Ein normierter Vektor hat die Länge 1.

$$1 = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}3^3 + x^2}$$

$$x = 0{,}93$$

Lösung 10.3

Berechnung nicht möglich, da Anzahl der Spalten der ersten Matrix nicht gleich Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix.

Lösung 10.4

$$(6 \quad 36)$$

Lösung 10.5

Man ermittelt zunächst den Rang der 3 x 3 Matrix und der erweiterten 4 x 3 Matrix.

Den Rang der 3x3 Matrix kann man über die Determinante ermitteln:

$$2 * 2 * 0 + 1 * 1 * 3 + 0 * 4 * 4 - (0 * 2 * 3 + 1 * 4 * 0 + 2 * 1 * 4) =$$

$$3 - 8 = -5$$

Die Determinante ist ungleich Null. Daher hat die Matrix vollen Rang. Der mengentheoretische Durchschnitt ist ein Punkt.

Lösung 10.6

1) Das Element a_{11}ist ungleich Null, daher

2) teilen wir durch 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 4 & 9 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3) Um unter dem Element a_{11} Nullen zu erzeugen, wird das 4-fache ($a_{21} = 4$) der ersten Zeile von der zweiten abgezogen und das 1-fache ($a_{31} = 1$) der ersten Zeile von der dritten Zeile abgezogen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Wir beginnen wieder mit 1), versuchen aber nun an der Stelle a_{22} eine Eins zu erzeugen.

4.1) a_{22} ist ungleich Null und daher

4.2) teilen wird Zeile 2 durch 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

4.3) Um unter a_{22} eine Null zu erzeugen, wird das (-1,5)-fache der zweiten Zeile von der dritten subtrahiert.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5) Da keine Zeilenvektoren komplett aus Nullen bestehen, hat die Matrix vollen Rang!

Lösung 10.7

Erstellen der Hesseschen Normalform:

$$\|a\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\frac{4}{5} * x_1 + \frac{3}{5} * x_2 - \frac{2}{5} = 0$$

Einsetzen des Punktes:

$$\frac{4}{5} * 2 + \frac{3}{5} * 2 - \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$$

Der Abstand ist positiv->Der Punkt liegt in Richtung des Orthogonalenvektors.

Lösungen Teil II

Lösung 10.1

Die Normalverteilung ist symmetrisch.

Zunächst sucht man also den Wert der Standardnormalverteilung, unter dem X zu 75% liegen wird.

$$\Phi_{0;1}(Z) = 0{,}75$$

Dies ist ca.0,67

Jetzt muss Z noch zu X transformiert werden:

$$Z = \frac{X - 5}{5} = 0{,}67$$

$$X = 8{,}35$$

Dies ist die ober Grenze. Die untere Grenze beträgt

$$5 - 5 * 0{,}67 = 1{,}65$$

Lösung 10.2

Die Summe aus normalverteilten Zufallsvariablen ist wieder normalverteilt. Die Parameter berechnen sich durch Addition (da es keine Faktoren vor den Varianzen gibt, kann auch hier einfach addiert werden).

$$E\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right) = 20$$

$$Var\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right) = 10$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i \leq 21\right) = P\left(Z \leq \frac{21 - 20}{\sqrt{10}}\right) = \Phi_{0;1}(0{,}32) = 62{,}55\%$$

Lösung 10.3

Hier benötigt man die Verteilungsfunktion der Binomialverteilung:

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$n = 50$

$k = 2\% * 50 = 1$

$p = 5\%$

$P_{n;p}(X \leq k) = 27{,}94\%$

Lösung zu 10.4

a) Richtig. Die Werte ergeben sich zufällig, da die Stichprobe ja zufällig aus der Grundgesamtheit gezogen wird.

b) Richtig.

c) Richtig.

d) Falsch. Dies ist bei unendlichen Grundgesamtheiten der Fall.

Lösung 10.5

a) Richtig. Sie hängen von der Realisation der Stichprobe ab.
b) Richtig.
c) Richtig.
d) Falsch.

Lösung 10.6 (nicht mehr klausurrelevant)

Die Ungleichung von Tschebyscheff lautet:

$$P(\mu - c\sigma \leq X \leq \mu + c\sigma) \geq 1 - \frac{1}{c^2}$$

$\mu - c\sigma$ ist die Abweichung vom Mittelwert. Diese darf maximal 1 sein. Es gilt also:

$5 - c * 2 = 1$

Daraus folgt $c = 2$.

Für die Wahrscheinlichkeit, dass X **weniger** als 2 von seinem Mittelwert abweicht folgt dann

$$P(|X - \mu| \leq 1) \geq \frac{3}{4}$$

Dass X mehr als 1 von seinem Mittelwert abweicht, ist entsprechend

$$1 - \ P(|X - \mu| \leq 1) = \ P(|X - \mu| > 1) < \frac{1}{4}$$