Hinweise zum Skript „Grundlagen der Wirtschaftsmathematik und Statistik“

Der Aufbau des Skriptes orientiert sich an den Inhalten des Fernuni Skriptes. Die Schwerpunkte wurden auf Inhalte gelegt, die in den Klausuren der letzten Jahre getestet wurden. Der Aufbau ist

1) Zusammenfassung
2) Beispiel
3) Übungsaufgaben

Da es sich um eine Zusammenfassung handelt, kann das Skript natürlich die Fernuni- Unterlagen nicht ersetzen. Da sich aber die Aufgabentypen in den Klausuren ständig wiederholen, ist es möglich mit dem Inhalt dieses Skriptes fast alle Klausuraufgaben der letzten 10 Jahre zu lösen. Ich empfehle dir, die Unterlagen der Fernuni und dieses Skript parallel durchzuarbeiten. Sehr wichtig ist es auch das Übungsprogramm der Fernuni zu nutzen. Neben den Aufgaben im Skript gibt es für Mathematik eine Aufgabensammlung auf der website des Lehrstuhls.

Außerdem solltest du stets das Glossar der Fernuniversität zur Hand haben und alle Begriffe, die du nicht kennst, dort nachlesen. Du benötigst für dieses Skript nur geringe mathematische Vorkenntnisse. Sollte Dir dennoch eine der Grundlagen fehlen, so kannst du mir gerne eine email an soenke@fernuni-online.de senden.

Viel Spaß beim Lesen und viel Erfolg bei der Klausur!

Soenke Semmelhaack

Inhaltsverzeichnis

1.1 Vektorrechnung

Kurz zur mathematischen Notation:

- Beliebige, aber feste Vektoren werden **fett** gedruckt.

- Die Komponenten eines Vektors werden untenstehend indiziert. a_1 wäre also die erste Komponente des Vektors $\boldsymbol{a}$**.**

- Im Fernuni Skript gibt es außerdem eine obere Indizierung, um mehrere verschiedene Vektoren $\boldsymbol{a}^{\mathbf{1}}, \boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}, \boldsymbol{a}^{\mathbf{3}}$ voneinander zu unterscheiden.

- Ein hochgestelltes ^{T} bezeichnet die Transposition eines Vektors. Dabei wird aus einem Zeilenvektor (Spaltenvektor) ein Spaltenvektor (Zeilenvektor).

- Einen Vektor mit der Länge 1 nennt man Einheitsvektor.

Addition und Subtraktion von Vektoren:

Bei der Addition oder Subtraktion von Vektoren werden einfach die einzelnen Komponenten addiert/subtrahiert.

Beispiel:$\binom{1}{3} - \binom{2}{5} = \binom{1-2}{3-5}$=$\binom{-1}{-2}$

Multiplikation mit einem Skalar:

Wird ein Vektor mit einer reellen Zahl multipliziert, so multipliziert man alle Komponenten des Vektors einzeln mit der reellen Zahl.

Beispiel: $2 * \binom{1}{3} = \binom{2*1}{2*3} = \binom{2}{6}$.

Skalarprodukt zweier Vektoren:

Das Skalarprodukt ist das Produkt aus einem Zeilenvektor und einem Spaltenvektor. **Achtung**: Hier ist die Reihenfolge wichtig! Zeilenvektor $*$ Spaltenvektor („inneres Produkt“) ergibt ein völlig anderes Produkt als Spaltenvektor $*$ Zeilenvektor (äußeres Produkt). Zum äußeren Produkt kommen wir später.

Beim Skalarprodukt werden zunächst die Produkte der einzelnen –an gleicher Stelle stehenden- Komponenten gebildet, und diese werden dann summiert.

Man sieht schnell, dass das Skalarprodukt nur berechnet werden kann, wenn die beiden Vektoren die gleiche Komponentenanzahl haben.

Beispiel: $(a_1 a_2) * \binom{b_1}{b_2} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

Spezialfall: Stehen 2 Vektoren senkrecht, also im 90° Winkel aufeinander, so ist ihr Skalarprodukt 0. Man sagt sie sind orthogonal zueinander.

Linearkombination

Bei einer Linearkombination werden einer oder mehrere Vektoren mit Skalaren multipliziert und anschließend addiert.

Beispiel:

$$x \binom{a_1}{a_2} + z \binom{b_1}{b_2}$$

So wäre zum **Beispiel** der Vektor $\binom{1}{2}$ eine Linearkombination aus $\binom{2}{3}$und$\binom{3}{4}$, da gilt $\binom{1}{2} = 2\binom{2}{3} - \binom{3}{4}$.

Dies gilt auch für einzelne Vektoren. Beispielsweise ist auch $\binom{2}{4}$ eine Linearkombination des Vektors $\binom{1}{2}$, da gilt $\binom{2}{4} = 2\binom{1}{2}$.

Länge eines Vektors:

Die Länge eines Vektors ist die Wurzel aus der Summe der Quadrate der einzelnen Komponenten. Vielleicht wird der Satz verständlicher, wenn wir ihn in mathematischer Notation schreiben:

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}$$

Beispiel: Der Vektor $\binom{2}{3}$ hat die Länge

$$\left\|\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

Ein Vektor wird normiert, indem man ihn durch seine Länge (auch „euklidische Norm") dividiert. Ein normierter Vektor hat also die Länge 1.

Der Vektor $\binom{2}{3}$ auf die Länge 1 normiert läßt sich also schreiben als

$$\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{13}}\\\frac{3}{\sqrt{13}}\end{pmatrix}$$

Der Winkel zwischen zwei Vektoren

Für den Winkel zwischen zwei Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ gilt die Beziehung:

$$\cos(a, b) = \frac{a^T b}{\|a\| * \|b\|}$$

Der Kosinus des Winkels zwischen zwei Vektoren entspricht also dem Skalarprodukt der beiden auf die Länge 1 normierten Vektoren.

Beispiel:

Der Kosinus des Winkels zwischen den beiden Vektoren $\binom{1}{2}, \binom{2}{2}$ beträgt

$$\cos(a, b) = \frac{(1 * 2 + 2 * 2)}{\sqrt{1^2 + 2^2} * \sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{5} * \sqrt{8}}$$

Übungsaufgaben zu 1.1

Aufgabe 1.1.1

Berechne

$$x = cos\left\{\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Aufgabe 1.1.2

Berechne x, sodass es Komponente eines normierten Vektors ist:

$$\begin{pmatrix}a\\x\end{pmatrix} = LK\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.1.3

Berechne

$$x = \begin{pmatrix}2 & 3 & 1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}0\\2\\7\end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.1.4

Berechne

$$cos(a, b) f\text{ür } a = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.1.5

Berechne x so, dass es Komponente eines normierten Vektors ist.

$$\begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}2\\x\end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.1.6

Berechne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.1.7

Berechne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.1.8

Berechne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} + 2 * \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösungen zu 1.1

Lösung zu 1.1.1:

$$x = \frac{(2 \quad 4 \quad 6) * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| * \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{2*1+4*2+6*1}{\sqrt{2^2+4^2+6^2} * \sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{16}{\sqrt{56} * \sqrt{6}} = 0{,}87$$

Lösung zu 1.1.2

Ich finde diese Art von Aufgabenstellung etwas schwer verständlich, sie kam aber teilweise in Klausuren dran. Hier ist eigentlich nur gefragt den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$zu normieren.

Länge des Vektors: $\sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$

Daraus folgt: $x = \frac{5}{\sqrt{29}}$

Lösung zu 1.1.3

$$x = 2*0+3*2+1*7 = 13$$

Lösung zu 1.1.4

$$cos(a,b) = \frac{a^T b}{\|a\| * \|b\|} = \frac{(1 \quad 3 \quad 5) * \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{matrix} \right\| * \left\| \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{matrix} \right\|} = \frac{14}{\sqrt{35} * \sqrt{20}} = 0{,}53$$

Lösung zu Aufgabe 1.1.5

Da ein normierter Vektor die Länge 1 hat, muss folgende Gleichung nach x aufgelöst werden:

$$\sqrt{0{,}5^2 + 0{,}2^2 + x^2} = 1$$

$$\sqrt{0{,}29 + x^2} = 1$$

$$0{,}29 + x^2 = 1$$

$$x = \sqrt{0{,}71} = 0{,}84$$

Lösung zu 1.1.6

Multiplikation nicht möglich, da Zeilenrang der ersten Matrix nicht gleich dem Spaltenrang der zweiten Matrix.

Lösung zu Aufgabe 1.1.7

Addition nicht möglich, da ungleicher Spaltenrang.

Lösung zu 1.1.8

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} + 2 * \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -13 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

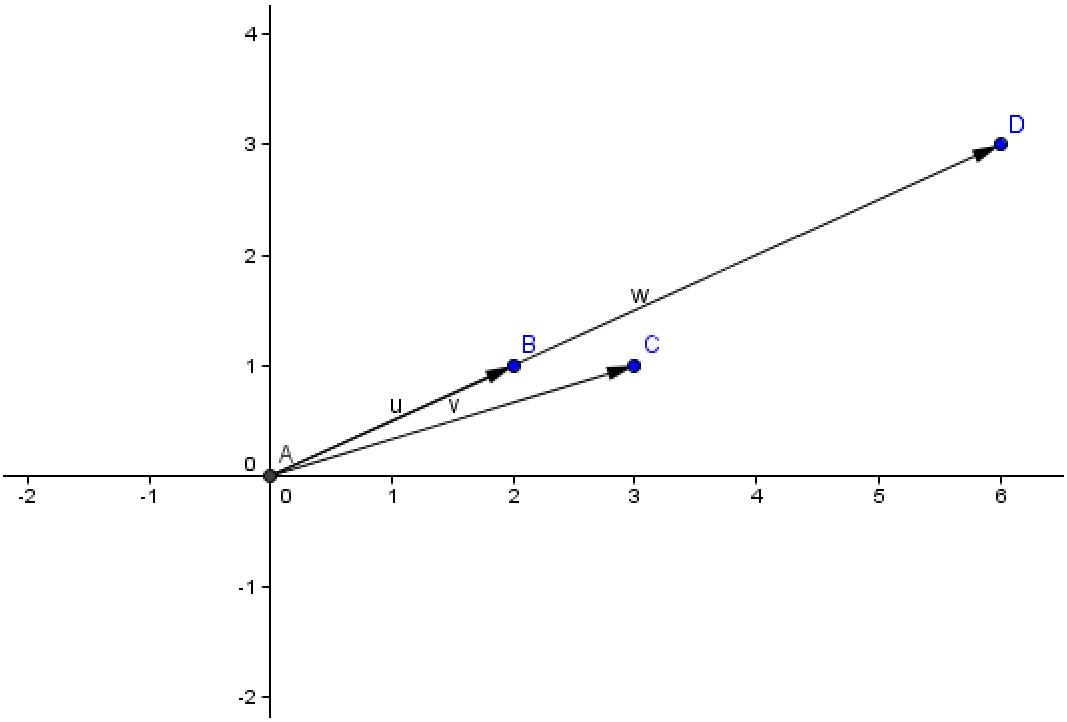
1.2 Lineare (Un-)Abhängigkeit

Ist ein Vektor nicht durch eine Linearkombination eines anderen Vektors (also das Vielfache des anderen Vektors) darstellbar, so sind diese beiden Vektoren linear unabhängig.

Beispiel: Die Vektoren $\binom{1}{3}$ und $\binom{1}{2}$ sind linear unabhängig, da man keinen der Vektoren durch das Vielfache (eine Linearkombination) des anderen Vektors darstellen kann.

Im R^2 bedeutet die lineare Abhängigkeit von 2 Vektoren, dass diese auf einer Gerade liegen. Sind 2 Vektoren linear unabhängig, so spannen sie eine Ebene auf. Da das R^2 eine Ebene ist, kann durch eine Linearkombination zweier linear unabhängiger Vektoren jeder Punkt dieser Ebene erreicht werden und somit auch jeder Vektor des R^2 dargestellt werden. (Es ist wichtig, dass Du das genau verstanden hast!)

Graphisch lässt sich das gut veranschaulichen.



Der Vektor ***u*** läßt sich als Linearkombination von ***w*** darstellen, nicht aber als Linearkombination von ***v***. Damit sind ***u*** und ***v*** linear unabhängig. ***w*** und ***v*** sind ebenfalls linear unabhängig. Mit einer Linearkombination aus ***v*** und ***u*** oder ***v*** und ***w*** läßt sich jeder beliebige Punkt der Ebene erreichen (sie spannen daher eine Ebene auf). Mit einer Linearkombination aus ***w*** und ***u*** aber nur jeder Punkt der Gerade, die durch den Nullpunkt und die Punkte B und D geht.

Mehrere Vektoren sind linear abhängig, wenn sich mindestens einer von Ihnen durch eine Linearkombination der anderen darstellen läßt, ohne dass dabei alle Skalare zwingend Null sind. Müssen alle Skalare gleich Null gewählt werden, so bezeichnet man das als triviale Lösung.

Man sieht schnell, dass drei Vektoren im R^2 immer linear abhängig sind. Drei linear unabhängige Vektoren würden nämlich einen dreidimensionalen Raum aufspannen, was im R^2 natürlich nicht möglich ist.

Mathematisch darf für die Bedingung der linearen Unabhängigkeit für die folgende Gleichung nur die triviale Lösung $a_i = 0$ bestehen:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x^i}\, a_i$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Es muss also eine Lösung für das Gleichungssystem:

$$a_1 + a_2 = 0$$

$$2a_1 + 3a_2 = 0$$

gefunden werden. Aus der ersten Gleichung folgt

$$a_1 = -a_2$$

Eingesetzt in die zweite Gleichung:

$$-2a_2 + 3a_2 = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$a_1 = 0$$

Die Vektoren sind also linear unabhängig.

Tipp: Eine andere, viel leichtere Methode, um 2 x 2 oder 3 x 3 Gleichungssysteme auf lineare Unabhängigkeit zu testen, ist die Ermittlung ihrer Determinante. Ist die Determinante ungleich Null, so sind die Vektoren linear unabhängig. Die Berechnung der Determinante wurde zwar im WS 2010/2011 aus dem Kurs gestrichen, da sie aber so nützlich für diesen häufigen Aufgabentyp ist, habe ich die Berechnung der Determinante im Anhang angefügt.

Wie man schon sehen kann, werden die Gleichungssysteme mit der Anzahl der Vektoren auch komplexer (mehr zur Lösung größerer Gleichungssysteme später). Zum Schluss noch einige einfache Zusammenhänge zwischen linearer Abhängigkeit und Anzahl der Vektoren (Diese Punkte musst du verstehen-dies ist nicht zum auswendig lernen):

- Die Linearkombination eines Vektors spannt eine Gerade auf.

- Die Linearkombination zweier linear unabhängiger Vektoren spannt eine Ebene auf.

- Die Linearkombination n linear unabhängiger Vektoren spannen einen n-dimensionalen Raum auf.

- In einem n-dimensionalen Raum können maximal n Vektoren linear unabhängig sein!

- Ist ein Gleichungssystem überbestimmt (mehr Gleichungen als Unbekannte), so sind die Vektoren nicht linear abhängig (Dann gibt es eine unendliche Zahl an Lösungen, was die unendliche Zahl an Linearkombinationen für einen Vektor widerspiegelt).

- Der Nullvektor ist immer linear abhängig von anderen Vektoren (Jede Gerade, die durch eine Linearkombination eines Vektors aufgespannt wird, geht durch den Nullpunkt).

- Eine Menge von Vektoren ist linear unabhängig, wenn die Matrix der zugehörigen Gleichungssystems vollen Rang hat (später mehr dazu).

- Ist die Summe der Skalare einer Linearkombination $= 1$, so spricht man von einer Konvexkombination.

Übungsaufgaben zu 1.2

Aufgabe 1.2.1

Sind folgende Vektoren jeweils linear abhängig?

i) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 1.2.2

Stelle $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dar.

Aufgabe1.2.3

Sind folgende Vektoren linear abhängig?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Lösungen zu 1.2

Lösung zu 1.2.1

i) Die beiden Vektoren sind linear unabhängig, da der erste Vektor nicht durch ein Vielfaches des zweiten dargestellt werden kann.

ii) Die Vektoren sind linear unabhängig, wenn der Nullvektor nur durch eine Linearkombination der Vektoren erzeugt werden kann, bei der alle Skalare $= 0$ sind.

Konkret muß das folgende Gleichungssystem gelöst werden:

$$a * \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + b * \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + c * \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In Gleichungsform:

$$3a + 2b - c = 0$$

$$-2a - 2c = 0$$

$$1a - 3b + 7c = 0$$

Es gibt nun verschiedene Methoden dieses Gleichungssystem zu lösen. Läßt es sich eindeutig lösen, ohne dass zwingend $a = b = c = 0$ folgt, sind die Vektoren linear abhängig.

In diesem Fall ergibt sich aus der zweiten Gleichung:

$$a = -c$$

Eingesetzt in die erste Gleichung ergibt sich:

$$4a + 2b = 0$$

Und für die dritte Gleichung:

$$-6a - 3b = 0$$

Wählt man $a = 1$, so folgt $c = -1$ und $b = -2$.

Daher sind die Vektoren linear abhängig.

iii) Die Vektoren sind linear unabhängig, wenn der Nullvektor nur durch eine Linearkombination der Vektoren erzeugt werden kann, bei der alle Skalare $= 0$ sind.

Konkret muss das folgende Gleichungssystem gelöst werden:

Aus

$$a * \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + b * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c * \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

folgt

I: $4a + 2b - 2c = 0$

II: $-2a + b - 2c = 0$

III $3a - b + 5c = 0$

Dieses Gleichungssystem kann durch Umformen und Einsetzen gelöst werden.

Aus Gleichung 1 folgt

$$c = 2a + b$$

Eingesetzt in Gleichung 2 folgt

$$-2a + b - 4a - 2b = -6a - 1b = 0$$

und eingesetzt in Gleichung 3 folgt

$$3a - b + 10a + 5b = 13a + 4b = 0$$

Einmal ergibt sich zwingend $a = -\frac{1}{6}b$ und einmal $a = \frac{-4}{13}b$.

Das Gleichungssystem ist nicht lösbar. Somit sind die Vektoren linear unabhängig.

Eine alternative Lösung wäre die Ermittlung der Determinante:

$$4 * 1 * 5 + 2 * (-2) * 3 + (-2) * (-2) * (-1) — 2 * 1 * 3 - 2 * (-2) * 5 - 4 * (-2) * (-1) = 22$$

Da 22≠0 sind die Vektoren linear unabhängig. (Zur Berechnung der Determinante, siehe Anhang)

Lösung zu 1.2.2

Zu lösen ist folgendes Gleichungssystem

$$2a + 3b + c = 1$$

$$-2b + 2c = -2$$

$$a + 4b + c = 4$$

Aus Gleichung II folgt $c = b - 1$. Eingesetzt in Gleichung I folgt

$$2a + 3b + b - 1 = 1$$

Daraus folgt

$$a = -2b + 1$$

Eingesetzt in Gleichung III folgt

$$-2b + 1 + 4b + b - 1 = 4$$

Daraus folgt

$$b = \frac{4}{3}$$

Eingesetzt in Gleichung II folgt

$$-\frac{8}{3} + 2c = -2$$

$$c = \frac{1}{3}$$

Eingesetzt in Gleichung I folgt

$$2a + 4 + \frac{1}{3} = 1$$

$$a = -\frac{5}{3}$$

Die Linaerkombination ist dann

$$-\frac{5}{3}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{4}{3}\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$$

Lösung zu 1.2.3

Vier Vektoren im R^3sind immer linear abhängig.