Inhaltsverzeichnis

1.0 Die Determinante einer Matrix

Zunächst eine kurze Wiederholung aus den Pflichtmodulen:

Eine Determinante ist eine Funktion, die einer quadratischen Matrix eine Zahl zuordnet.

Wichtig sind zunächst die Determinanten für 2 x 2 und 3 x 3 Matrizen.

Die Determinante einer 2 x 2 Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ berechnet sich nach

$Det\ \boldsymbol{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Die Komponenten der Hauptdiagonalen werden miteinander multipliziert und das Produkt der Komponenten der Nebendiagonalen wird davon subtrahiert. Da das schwer verständlich ist, hier konkret:

Die Determinante einer 3 x 3 Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ berechnet sich nach

$$Det\ \boldsymbol{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

Um sich diese Rechenregel leichter zu merken, solltest du dir die einzelnen Produkte grafisch veranschaulichen. Dazu setzen wir die ersten zwei Spalten hinten an die Matrix ran:

Die ersten drei Produkte sind die Produkte aus den folgenden drei eingezeichneten Diagonalen.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Die zweiten drei Produkte sind die Produkte aus den folgenden drei eingezeichneten Diagonalen.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Die Subtraktion der 3 Nebendiagonalen der erweiterten Matrix von den Hauptdiagonalen nennt man die **Regel von Sarrus**.

Achtung: Die Regel von Sarrus gilt nur für 3 x 3 Matrizen!

Für den Kurs Vertiefung Wirtschaftsmathematik Du Statistik solltest du zusätzlich noch folgendes beherrschen:

Determinante einer 4x4 Matrix (Laplace Entwicklungssatz)

Zur Berechnung der Determinante wählt man eine beliebige Zeile (am besten die mit möglichst vielen Nullen) und geht nach folgendem Schema vor:

1. Schritt: Wähle das erste Element der gewählten Zeile und streiche die Zeile und Spalte dieses Elementes. Multipliziere nun das Element mit der Determinante der neuen 3x3 Matrix (die durch Streichung der Zeile und Spalte übrig geblieben ist).

2. Schritt: Es geht weiter mit der Ausgangsmatrix. Wähle das zweite Element der gewählten Zeile und streiche die Zeile und Spalte dieses Elementes. Multipliziere nun das Element mit der Determinante der neuen 3x3 Matrix.

3. Schritt: Wie 2.Schritt nur mit dem 3ten Element der gewählten Zeile.

4. Schritt: Wie 2.Schritt nur mit dem 4ten Element der gewählten Zeile.

5. Schritt: Verknüpfe die Ergebnisse aus Schritt 1-4 und nutze dabei folgendes Vorzeichenschema:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & .. \\ - & + & - & + & .. \\ + & - & + & - & .. \\ - & + & - & + & .. \\ + & - & + & - & .. \end{pmatrix}$$

Je nachdem, welche Zeile man gewählt hat müssen also entsprechende Vorzeichen gewählt werden. Im Fall der ersten Zeile müsste man also rechnen: Ergebnis des ersten Schritts minus das des 2.Schritts plus das des dritten Schrittes, usw.

Beispiel:

Berechne die Determinante folgender Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Antwort:

Ich wähle die erste Zeile und beginne mit dem ersten Element:

$$\begin{pmatrix} [1] & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Es muss nun die Determinante der folgenden Matrix berechnet werden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Im zweiten Schritt werden die Zeilen und Spalten des zweiten Elementes der ersten Zeile gestrichen und es muss die Determinante der folgenden Matrix berechnet werden:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Nach 2 weiteren Schritten ergibt sich die Determinante der 4x4 Matrix wie folgt:

$$1 * \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} - 2 * det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} + 0 * det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 1 * det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Interpretation der Determinante

Der Betrag einer Determinante einer 2x2 Matrix gibt den Flächeninhalt des Parallelogramms an, das durch die Zeilenvektoren aufgespannt wird.

Der Betrag einer Determinante einer 3x3 Matrix gibt das Volumen des erweiterten Parallelogramms (Spat) an, das durch die Zeilenvektoren aufgespannt wird.

Rechenregeln für Determinanten

1) Nur quadratische Matrizen haben Determinanten

2) $det(\boldsymbol{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}$

3) $\det(\boldsymbol{A} * \boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A}) * \det(\boldsymbol{B})$

4) $\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}^T)$

5) Vertauscht man zwei Zeilen einer Matrix, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

6) Addiert man zu einer Zeile der Matrix das vielfache einer anderen Zeile, so ändert sich die Determinante nicht.

7) Wird eine Zeile mit einer beliebigen Zahl λ multipliziert so muss auch die Determinante mit dieser Zahl multipliziert werden.

Lösung eines LGS mit Hilfe der Determinantenrechnung (Cramersche Regel)

Zu lösen sei folgendes Gleichungssystem:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

Die Cramersche Regel möchte ich direkt an einem Beispiel erläutern:

Gegeben sei ein LGS der Form

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ausgeschrieben ergibt sich folgendes LGS:

$$1x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 2$$

$$0 + 1x_2 + 3x_3 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 + 1x_3 = 2$$

Um x_1 zu berechnen, vertauscht man den x_1-Vektor mit dem b Vektor und berechnet die Determinante der neuen Matrix. Diese teilt man durch die Determinante der Matrix A. Genauso verfährt man mit x_2 und x_3.

Konkret erhält man für x_1 die Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Determinante ist $2 + 12 + 6 - 2 - 4 - 18 = -4$

Die Determinante der Matrix A ist: $1 + 12 - 2 - 9 = 2$

Damit ist $x_1 = -2$

Aufgaben zu 1.0

Aufgabe 1.1

Berechne die Determinante zu folgender Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.2

Berechne die Determinante zu folgender Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösungen zu 1.0

Lösung zu 1.1

Nutzung der Regel von Sarrus:

$$\det A = (1 * 2 * 1 + 2 * 1 * 2) - (1 * 1 * 2) = 4$$

Lösung zu 1.2

Hier müssen drei „Unterdeterminanten“ berechnet werden:

$$det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 20 - 22 = -2$$

$$det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 11 - 8 = 3$$

$$det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 6 - 10 = -4$$

$$\det A = 1 * (-2) - 2 * 3 - 1 * (-4) = -4$$

2.0 Eigenwerte und quadratische Formen

Bei sogenannten Eigenwerten geht es um folgende Fragestellung:

Für welches λ gilt:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

für $\boldsymbol{x} \neq 0$

Das λ, für das die oben angegebene Gleichung gilt, heißt dann Eigenwert von A. Die Bedingung für den Eigenwert lässt sich mathematisch auch anders formulieren:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \mathbf{1})x = 0$$

Diese Bedingung ist ein lineares homogenes Gleichungssystem. Gibt es für dieses Gleichungssystem eine Lösung, die nicht die triviale Lösung $x = 0$ ist, so ist die Determinante gleich Null. Durch Berechnung der Determinante von $(\boldsymbol{A} - \lambda \mathbf{1})$ erhält man das „charakteristische Polynom". Dies verdeutlicht man am besten anhand eines

Beispiels:

Zu berechnen sind die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Antwort:

Man stellt zunächst die Matrix $(\boldsymbol{A} - \lambda \mathbf{1})$ auf:

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - \lambda & 3 \\ 3 & 0 - \lambda \end{pmatrix}$$

Dann berechnet man die Determinante:

$$(8 - \lambda) * (-\lambda) - 9 = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0$$

Durch Lösung dieser Gleichung erhält man die Eigenwerte:

In diesem Fall lassen sich die Nullstellen der Funktion leicht ablesen.

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = 9$$

Ermittlung der Eigenvektoren

Die zu den Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren werden ermittelt, indem man die Eigenwerte in die Gleichung

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{1})\boldsymbol{x} = 0$$

einsetzt. Für den ersten Eigenvektor erhält man:

$$\begin{pmatrix} 8-\lambda_1 & 3 \\ 3 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = 0$$

Dies ist ein Gleichungssystem mit 2 Unbekannten und 2 Gleichungen.

$$9x_1 + 3x_2 = 0$$

$$3x_1 + x_2 = 0$$

Aus Gleichung I folgt:

$$3x_1 = -x_2$$

Ein möglicher Eigenvektor wäre also $\boldsymbol{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Entsprechend berechnet man den Eigenvektor zum zweiten Eigenwert.

Achtung: Wie Du siehst, kann es zu jedem Eigenwert mehrere Eigenvektoren geben.

Quadratische Formen

Eine Matrix **Q** hat quadratische Form, wenn sie wie folgt darstellbar ist:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$$

,wobei **A** eine symmetrische Matrix ist.

Beispiel:

Bestimme die quadratische Form der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Antwort:

$$Q = (x_1 \quad x_2) * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \quad (x_1 + 2x_2 \quad 2x_1 + 2x_2) * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

Definitheit

Bei der Definitheit geht es um die Frage, ob die quadratische Form für alle x nur positive oder nur negative Werte annimmt.

Eine quadratische Form heißt:

-positiv definit, wenn für alle x gilt: $Q > 0$,

-positiv semidefinit, wenn für alle x gilt: $Q \geq 0$,

-negativ definit, wenn für alle x gilt: $Q < 0$,

-negativ semidefinit, wenn für alle x gilt: $Q \leq 0$,

-indefinit, in allen anderen Fällen.

Für Matrizen gilt: Eine Matrix ist

-positiv definit, wenn alle Eigenwerte positiv sind,

-positiv semidefinit, wenn keiner der Eigenwerte negativ und mindestens einer positiv ist,

-negativ definit, wenn alle Eigenwerte negativ sind,

-negativ semidefinit, wenn keiner der Eigenwerte positiv und mindestens einer negativ ist,

-indefinit, in allen anderen Fällen.

Aufgaben 2.0

Aufgabe 2.1

Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren zu folgender Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.2

Bestimme die quadratische Form der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösungen zu 2.0

Lösung zu 2.1

$$A - \lambda\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

Berechnung der Determinante:

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda) * (4-\lambda) + 2$$

Nullsetzen:

$$(1-\lambda) * (4-\lambda) + 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = 3$$

$$\lambda_2 = 2$$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1-3 & -1 \\ 2 & 4-3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Als Gleichungssystem geschrieben:

$$-2x_1 - 1x_2 = 0$$

$$2x_1 + 1x_2 = 0$$

Daraus folgt:

$$x_2 = -2x_1$$

Ein Eigenvektor von $\lambda_1 = 3$ wäre also

$$x_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ 2 & 4-2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Als Gleichungssystem geschrieben:

$$-1x_1 - 1x_2 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 = 0$$

Daraus folgt:

$$x_2 = -x_1$$

Ein Eigenvektor von $\lambda_1 = 3$ wäre also

$$x_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung zu 2.2

$$Q = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 & 2x_2 + x_3 & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= x_1^2 + 2x_2x_1 + 2x_2^2 + x_2x_3 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$